(1) 指出系统的被控对象、被控量和给定量,画出系统方框图。

(2) 说明控制系统中控制装置的各组成部分。

解　(1) 根据题意,控制系统的目的是使导弹发射架能够转动希望的角度,故被控对象是发射架,被控量是发射架转动的角度 θ_c,给定量是手轮转动的角度 θ_r(希望值)。系统方框图如图 1.4 所示。

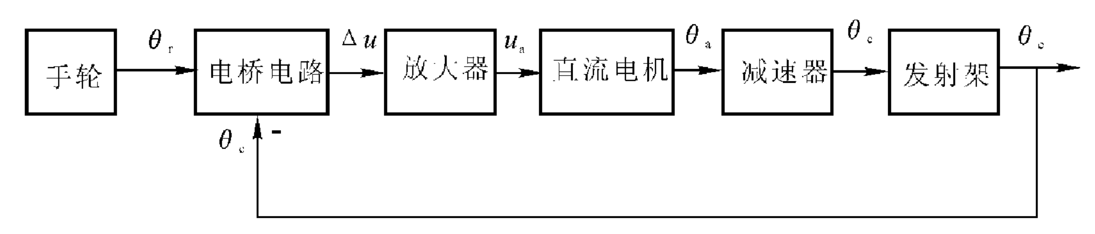


图 1.4　导弹发射架方位控制系统方框图

(2) 控制装置各组成部分如下:

手轮是给定元件,给出导弹发射架希望转动的角度 θ_r;电位器 P_1,P_2 并联后跨接到同一电源 E_0 两端构成电桥电路,它既是测量元件又是比较元件,给出表征发射架希望转过角度与实际转过角度差的偏差电压 Δu;放大器是放大元件;直流电机和减速器一起组成了执行机构,对发射架转动角度进行控制。

当导弹发射架转过角度 θ_c 与希望角度 θ_r 一致时,电桥电路输出电压 $\Delta u=0$,系统处于平衡状态。当手轮转过(如顺时针转动)某一角度时,$\theta_r>\theta_c$,$\Delta u>0$,放大器输出电压驱动直流电机正向转动,经减速器带动发射架顺时针偏转。当 $\theta_c=\theta_r$ 时,系统又在新的条件下达到平衡,发射架处于新的希望位置。当手轮逆时针转动时的调节过程正好相反。该系统实现了发射架位置跟随手轮转角 θ_r 的变化规律而变化的控制目的。此系统属于闭环随动系统。

【点评】　负反馈控制的原理是利用偏差减小或消除偏差,使得输出信号按输入信号规律变化。本例中,导弹发射架转动角度就是根据发射架希望转过的角度 θ_r 与发射架实际转过的角度 θ_c 的差来调节,最终使发射架位置处于希望位置。要使系统能够正常工作,必须处于负反馈状态,若改变主回路某一信号极性(如电位器 P_1 或 P_2 处的电源极性反接、放大器输入端信号线对调、直流电机激磁电压极性改变等),都会改变系统主反馈极性,成为正反馈。读者可以自行分析当系统处于正反馈时的工作状况及后果。

例 **1.3**　图 1.5 是液位自动控制系统原理图,希望液面高度 h_r 维持不变。

(1) 指出系统的被控对象、被控量、给定量以及干扰量,画出系统方框图;

(2) 说明液位控制系统工作原理。

解　(1) 系统的任务是保持水箱液面高度不变,因此被控对象是水箱,被控量是液面高度,电位计设定电压 u_r(表征液位的希望值 h_r)是给定量,流量

Q_2 是干扰量。系统方框图如图 1.6 所示。

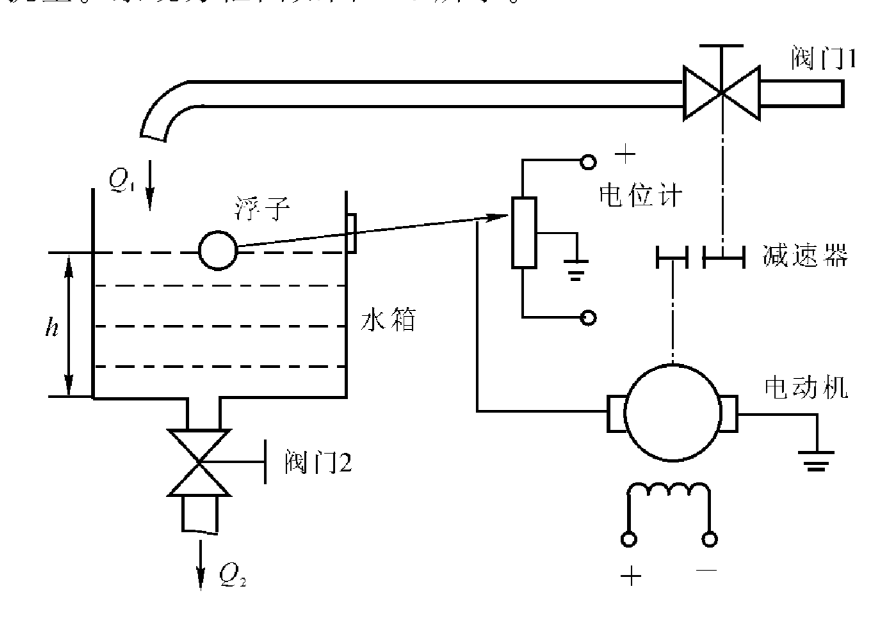


图 1.5　液位自动控制系统原理图

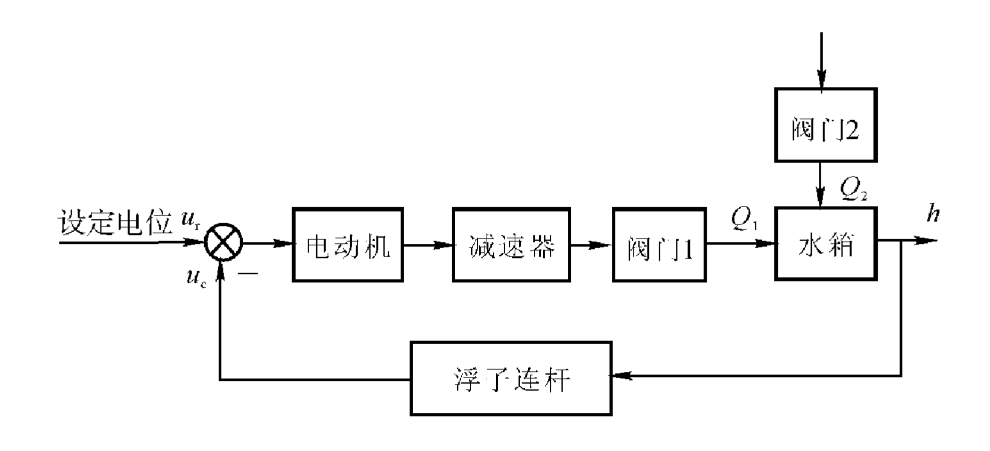


图 1.6　液位自动控制系统方框图

(2) 当电位计电刷位于中点位置(对应 u_r)时,电机不动,阀门 1 有一定开度,使水箱中流入水量 Q_1 与流出水量 Q_2 相等,从而液面保持在希望高度 h_r 上。一旦有了干扰使流出水量 Q_2 发生变化,例如 Q_2 增大,液位下降,浮子位置降低,通过杠杆作用使电位器电刷从中点位置上移,从而给电动机提供正向电压,驱动电动机正转,通过减速器增大阀门 1 的开度,使进入水箱的水量增多。这时,水箱液面上升,浮子位置相应上升,直至电刷回到中点位置,系统重新处于平衡状态,液面恢复给定高度。反之,若干扰使 Q_2 减小,液位上升,则系统会自动减小阀门 1 开度,减少流入水量,使液位下降至给定高度 h_r。

【点评】 (1) 除了控制量外,对于直接作用于被控对象而且是不希望有的物理量可以看做是干扰量。绘制方框图时,干扰量直接加在被控对象上。

(2) 方框图的形式不一定是惟一的,可根据需要将系统分得细一些,也可画得概括简

练一些,但各个方框所表示的具体元部件及各方框间的联系必须与实际情况一致。

例 **1.4**　图 1.7 为水温控制系统示意图。冷水在热交换器中由通入的蒸汽加热,从而得到一定温度的热水。冷水流量变化用流量计测量。请绘制系统方框图,并说明系统是如何保持热水温度为期望值的?系统的被控对象和控制装置各是什么?

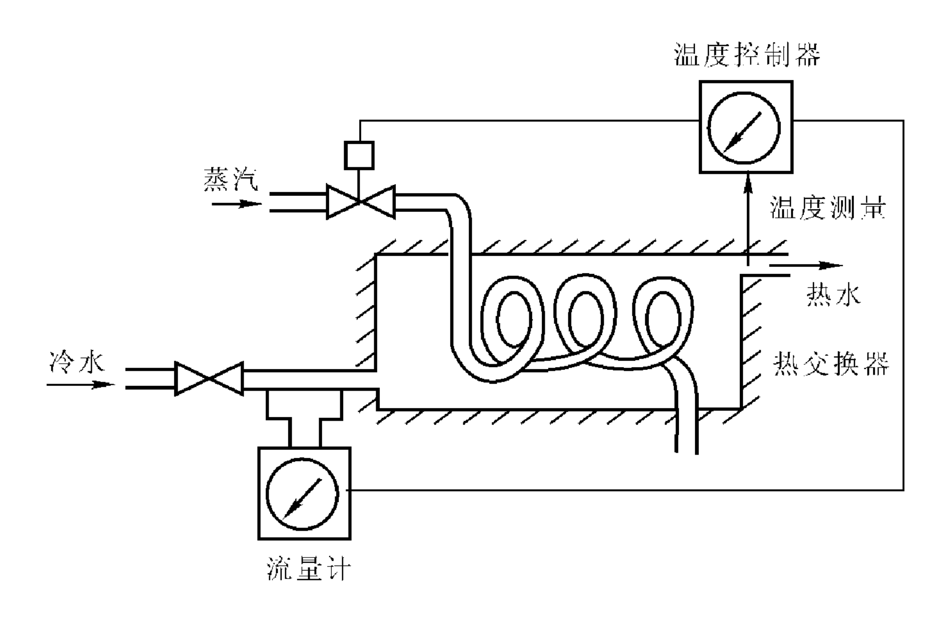


图 1.7　水温控制系统原理图

解　系统的方框图如图 1.8 所示。

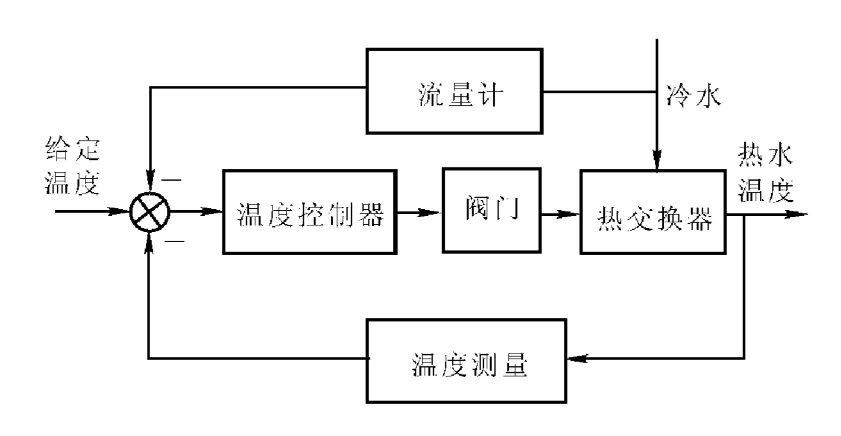


图 1.8　水温控制系统方框图

温度传感器不断测量实际温度,并在温度控制器中与给定温度相比较,若低于给定温度,其偏差值使蒸汽阀门开大一点,进入热交换器的蒸汽量加大,热水温度升高,直至偏差为零。如果由于某种原因,冷水(可视为干扰)流量加大则由流量计测得,通过按顺馈补偿,靠温度控制器使阀门开大,蒸汽量增加,从而补偿了冷水量的增加而引起热水温度的降低,确保热交换器出口处的热水温为给定值。

其中,被控对象是热交换器,热水温度为被控量,除热交换器(被控对象)外,其余部分为控制装置。

例 **1.5** 图 1.9(a),(b)所示的系统均为电压调节系统。假设空载时两系统的发电机端电压均为 110 V,试问带上负载后,图(a),(b)中哪个系统能保持 110 V 不变,哪个电压会低于 110 V,为什么?

解 带上负载后,图 1.9(a)与(b)的端电压均下降,图 1.9(a)系统由于自动调压的作用能恢复到 110 V,而图 1.9(b)系统却不能。这是因为图 1.9(a)所示系统,当发电机两端电压低于给定电压时,其偏差电压经放大器放大使执行电机(SM)转动,经减速器带动电刷,使发电机的激磁电流增大,提高发电机 G 的端电压,从而使偏差电压减小,直至偏差电压为零,执行电机停止转动。因此,图 1.9(a)系统能保持 110 V 不变。

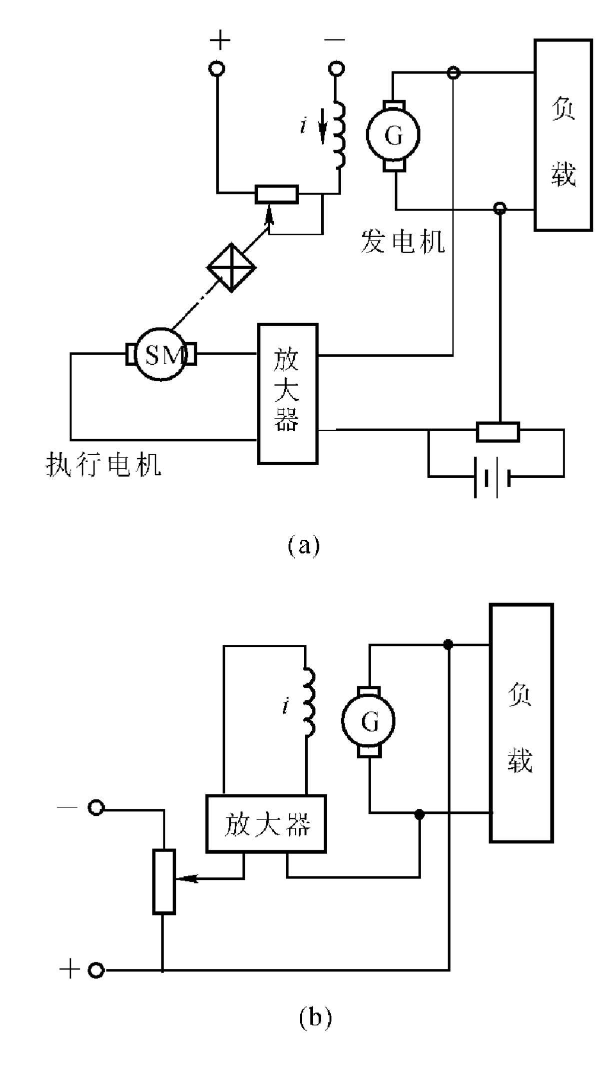


图 1.9 电压调节系统工作原理图

对图 1.9(b)所示系统,当发电机两端电压低于给定电压时,其偏差电压经放大器直接使发电机激磁电流增大,提高发电机的端电压,即发电机 G 的

端电压回升,此时偏差电压减小,但偏差电压始终不能为零。因为当偏差电压为零时,激磁电流 $i=0$,发电机不能工作。故图 1.9(b)系统的端电压会低于 110 V。

第二章

控制系统的数学模型

例 **2.1** 如图 2.1 所示，u_r，u_c 分别是输入电压和输出电压，x_r，x_c 分别是输入位移和输出位移，f_1，f_2 是黏性阻尼系数，k_1，k_2 是弹性系数，建立两个系统的微分方程并求其传递函数。

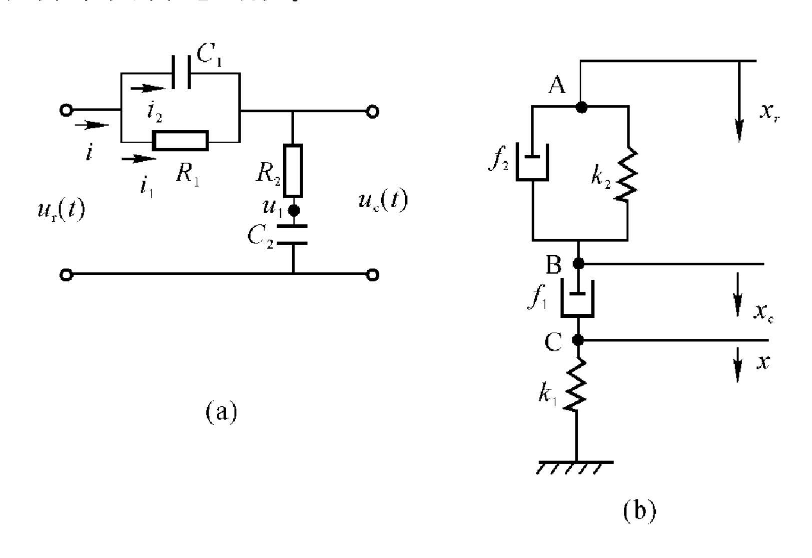


图 2.1 例 2.1 图

(a) RC 网络；(b) 机械系统

解 对于图 2.1(a)，根据克希霍夫定律，列写微分方程组

$$\begin{cases} u_r = u_c + i_1 R_1 \\ i_2 = C_1 \dfrac{\mathrm{d}(u_r - u_c)}{\mathrm{d}t} \\ i = i_1 + i_2 \\ u_c = iR_2 + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i\mathrm{d}t \end{cases}$$

消去中间变量 i，i_1，i_2，有

$$R_1R_2C_1C_2\frac{d^2u_c}{dt^2}+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)\frac{du_c}{dt}+u_c=$$

$$R_1R_2C_1C_2\frac{d^2u_r}{dt^2}+(R_1C_1+R_2C_2)\frac{du_r}{dt}+u_r$$

根据传递函数的定义，有

$$\Phi(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2)s+1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

对于图 2.1(b)，设 A，B，C 点的位移分别是 x_r，x_c，x。根据牛顿第二定律，对于 B 点，有

$$f_2\frac{d(x_r-x_c)}{dt}+k_2(x_r-x_c)+f_1\frac{d(x-x_c)}{dt}=0$$

对于 C 点，有

$$f_1\frac{d(x_c-x)}{dt}=k_1x$$

则消去中间变量 x，有

$$f_1f_2\frac{1}{k_1k_2}\frac{d^2x_c}{dt^2}+(f_1\frac{1}{k_1}+f_2\frac{1}{k_2}+f_1\frac{1}{k_2})\frac{dx_c}{dt}+x_c=$$

$$f_1f_2\frac{1}{k_1k_2}\frac{d^2x_r}{dt^2}+(f_1\frac{1}{k_1}+f_2\frac{1}{k_2})\frac{dx_r}{dt}+x_r$$

根据传递函数的定义，有

$$\Phi(s)=\frac{x_c(s)}{x_r(s)}=\frac{f_1f_2\frac{1}{k_1k_2}s^2+(f_1\frac{1}{k_1}+f_2\frac{1}{k_2})s+1}{f_1f_2\frac{1}{k_1k_2}s^2+(f_1\frac{1}{k_1}+f_2\frac{1}{k_2}+f_1\frac{1}{k_2})s+1}$$

从本例可以看出，虽然图 2.1 中两个系统的类型不同，2.1(a)为电路系统，2.1(b)为机械系统，但它们可以用相同形式的数学模型描述，这样的系统称为相似系统。相似系统及其解的存在使得分析者可以将一个系统的分析结果推广到具有相同数学模型的其他系统。特别是可以将简单控制系统的分析结果推广到相似的复杂控制系统中去，为分析和设计复杂系统提供便利。

例 **2.2**　图 2.2 所示为一个齿轮系，其中 T 为电动机输出的力矩，作用在轴 1 上，T_{fz}是作用在轴 3 上的负载转矩。(J_1,f_1)，(J_2,f_2)和(J_3,f_3)分别代表相应轴的转动惯量和黏性阻尼系数，θ_1，θ_2，θ_3 分别是轴 1，2，3 的转角，i_1，i_2 为二级齿轮的传动比，即 $i_1=\theta_1/\theta_2$，$i_2=\theta_2/\theta_3$，求输入量是转矩 T 和 T_{f_z}，输出量是转角 θ_1 的运动方程。

解　设 T_1，T_2，T_3，T_4 分别表示齿轮 1，2，3，4 受到的与其啮合的齿轮作用的力矩，那么，对于轴 1，应用牛顿第二定律，有

$$J_1\frac{d^2\theta_1}{dt^2}=T-T_1-f_1\frac{d\theta_1}{dt}$$

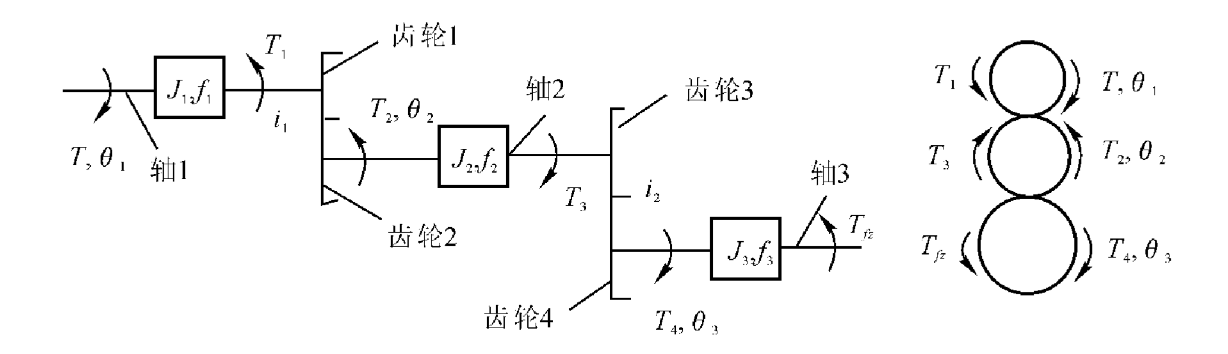


图 2.2 齿轮系

对轴 2，有

$$J_2\frac{\mathrm{d}^2\theta_2}{\mathrm{d}t^2}=T_2-T_3-f_2\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}$$

对轴 3，有

$$J_3\frac{\mathrm{d}^2\theta_3}{\mathrm{d}t^2}=T_4-T_{fz}-f_3\frac{\mathrm{d}\theta_3}{\mathrm{d}t}$$

根据已知条件

$$i_1=\theta_1/\theta_2$$

$$i_2=\theta_2/\theta_3$$

若忽略齿轮啮合中的功率损耗，可得

$$T_1\theta_1=T_2\theta_2$$

$$T_3\theta_2=T_4\theta_3$$

联立上述 7 个方程，消去中间变量 θ_2，θ_3 及 T_1，T_2，T_3，T_4，整理后，可得该齿轮传动系统的运动方程式

$$\left(J_1+\frac{J_2}{i_1^2}+\frac{J_3}{i_1^2 i_2^2}\right)\frac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}t^2}+\left(f_1+\frac{f_2}{i_1^2}+\frac{f_3}{i_1^2 i_2^2}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t}=T-\frac{T_{fz}}{i_1 i_2}$$

【点评】系统微分方程是描述系统动态性能的一种数学模型。

建立系统或元件微分方程的一般步骤如下：

(1) 分析系统(或元件)的物理过程，确定输入、输出变量。

(2) 从输入端开始，按照信号的传递顺序，依据各变量所遵循的物理(或化学)定律，列写各元部件的动态方程。

(3) 消去中间变量，得到描述输入、输出变量的微分方程。

(4) 标准化处理。将与输入有关的各项放在等号之右，与输出有关的各项放在等号之左；等号左、右侧各项均按降幂排列。最后将系数归化为具有一定物理意义的形式。

例 2.3　图 2.3 是一个液位控制系统。图中，输入量为进水量 Q_1，输出量为水位 H，Q_1 和 H 都是在基准量 Q_{10} 与 H_0 基础上的增量。此外，Q_2 表示出水量的增量，R 表示流阻。设 A 为水箱底面积，试求水箱的传递函数。

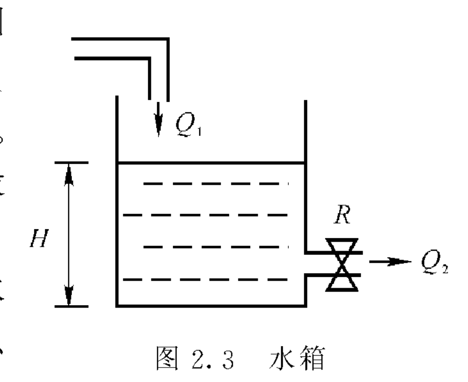


图 2.3　水箱

解　根据流体连续性原理，$\mathrm{d}t$ 时间内，水箱内流体增加（或减少）$A\mathrm{d}H$，与进（或出）水总量 $(Q_1-Q_2)\mathrm{d}t$ 相等，则 $A\mathrm{d}H=(Q_1-Q_2)\mathrm{d}t$

又根据托里拆利定理，出水量与水位高度的平方根成正比，则有

$$Q_2=\frac{\sqrt{H}}{R'}$$

其中 $1/R'$ 为比例系数。由于上式是非线性方程，应作线性化处理。在工作点 (Q_{10},H_0) 附近进行台劳级数展开，并略去二阶以上无穷小量，得

$$Q_2=\left(\frac{1}{2R'\sqrt{H}}\right)_{(Q_{10},H_0)}\cdot H=\frac{1}{2\sqrt{H_0}R'}H=\frac{1}{R}H$$

式中，$R=2\sqrt{H_0}R'$ 为流阻。

于是水箱的线性化微分方程为

$$RA\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}+H=RQ_1$$

在零初始条件下，对上式取拉氏变换，得水箱传递函数为

$$\frac{H(s)}{Q_1(s)}=\frac{R}{RAs+1}$$

例 2.4　求图 2.4 所示各信号 $x(t)$ 的像函数 $X(s)$。

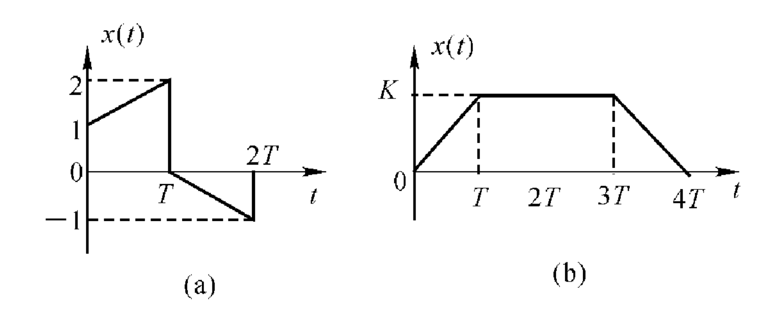


图 2.4　信号图

解　此例题是为了复习拉氏变换的有关知识而选录的。

这种题目一般有两种解法。

对图 2.4(a)所示信号图：

解法 1　利用拉氏变换的定义计算如下：

$$X(s)=\int_0^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{T} x_1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_T^{2T} x_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

而 $x_1(t)=1+\dfrac{t}{T}$，$x_2(t)=1-\dfrac{t}{T}$，所以，代入上式并积分，得

$$X(s)=\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}\right)(1-\mathrm{e}^{-Ts})^2$$

解法 2 利用叠加原理计算，这种方法的关键在于正确地将信号 $x(t)$ 表示成若干个典型信号叠加的形式。

对图 2.4(a)所示信号图：

$$x(t)=1(t)+\frac{1}{T}t-2\times1(t-T)-\frac{2}{T}(t-T)\times1(t-T)+$$
$$1(t-2T)+\frac{1}{T}(t-2T)\times1(t-2T)$$

经拉氏变换可得

$$X(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}-\frac{2}{s}\mathrm{e}^{-Ts}-\frac{2}{Ts^2}\mathrm{e}^{-Ts}+\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2Ts}+\frac{1}{Ts^2}\mathrm{e}^{-2Ts}=$$
$$\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}\right)(1-\mathrm{e}^{-Ts})^2$$

对图 2.4(b)所示信号图，利用叠加原理，信号 $x(t)$ 可表示为

$$x(t)=\frac{K}{T}t\times1(t)-\frac{K}{T}(t-T)\times1(t-T)-$$
$$\frac{K}{T}(t-3T)\times1(t-3T)+\frac{K}{T}(t-4T)\times1(t-4T)$$

拉氏变换后可得

$$X(s)=\frac{K}{Ts^2}(1-\mathrm{e}^{-Ts}-\mathrm{e}^{-3Ts}+\mathrm{e}^{-4Ts})$$

例 2.5 已知单位负反馈系统如图 2.5 所示，且已知初始条件 $c(0)=\dot{c}(0)=2$。

试求系统在 $r(t)=1(t)$ 作用下的输出响应 $c(t)$。

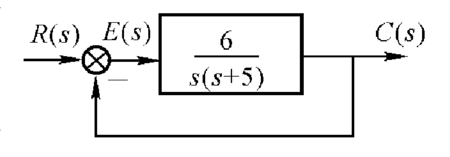


图 2.5 系统结构图

解 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{6}{s^2+5s+6}=\frac{C(s)}{R(s)}$$

对应的系统微分方程

$$\ddot{c}(t)+5\dot{c}(t)+6c(t)=6r(t)$$

对上式做拉氏变换

$$[s^2C(s)-sc(0)-\dot{c}(0)]+5[sC(s)-c(0)]+6C(s)=6R(s)$$

将初始条件 $c(0)=\dot{c}(0)=2$ 及 $R(s)=\frac{1}{s}$代入，得

$$C(s)=\frac{6\frac{1}{s}+2s+12}{s^2+5s+6}=\frac{2s^2+12s+6}{s(s^2+5s+6)}$$

为了求 $C(s)$的拉氏反变换 $c(t)$，需将 $C(s)$部分分式展开，得

$$C(s)=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+2}+\frac{A_3}{s+3}$$

式中
$$A_1=\lim_{s\to 0}C(s)s=1$$

$$A_2=\lim_{s\to -2}C(s)(s+2)=5$$

$$A_3=\lim_{s\to -3}C(s)(s+3)=-4$$

则
$$c(t)=\mathscr{L}^{-1}[C(s)]=1+5\mathrm{e}^{-2t}-4\mathrm{e}^{-3t}$$

【点评】 已知系统的传递函数，要求非零初始条件下系统的解时，首先需将传递函数对应的系统微分方程写出，然后利用拉氏变换求微分方程的解。

例 **2.6** 已知描述系统的微分方程为

$$x_1(t)=K[r(t)-c(t)]$$

$$x_2(t)=\tau\dot{r}(t)$$

$$\dot{x}_3(t)=x_1(t)+x_2(t)-x_3(t)$$

$$T\dot{x}_4(t)=x_3(t)-x_4(t)+x_5(t)$$

$$c(t)=x_4(t)+n(t)$$

$$x_5(t)=T\dot{n}(t)+n(t)$$

其中 $r(t)$，$n(t)$分别为输入量和扰动量，$c(t)$为输出量，$x_j(t)(j=1,\cdots,5)$是中间变量，其余为常数。绘制系统的结构图，并求传递函数 $C(s)/R(s)$ 及 $C(s)/N(s)$。

解　对各微分方程进行拉氏变换，得

$$X_1(s)=K[R(s)-C(s)]$$

$$X_2(s)=\tau sR(s)$$

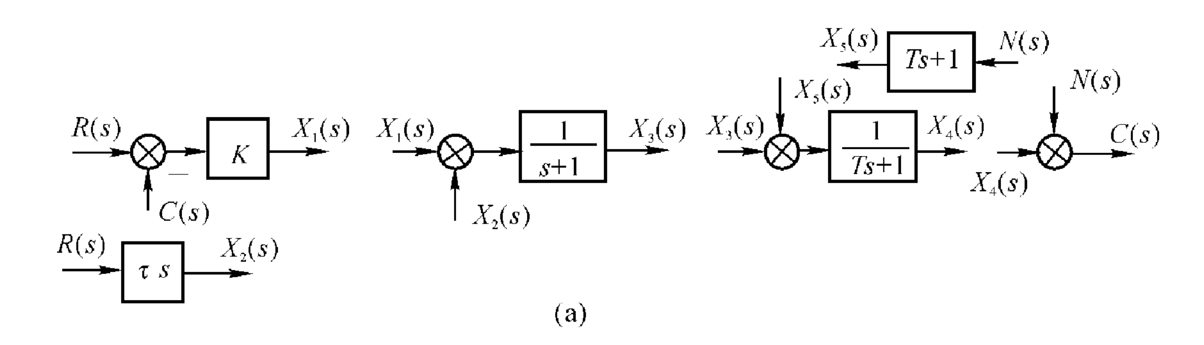
$$X_3(s)=\frac{X_1(s)+X_2(s)}{s+1}$$

$$X_4(s)=\frac{X_3(s)+X_5(s)}{Ts+1}$$

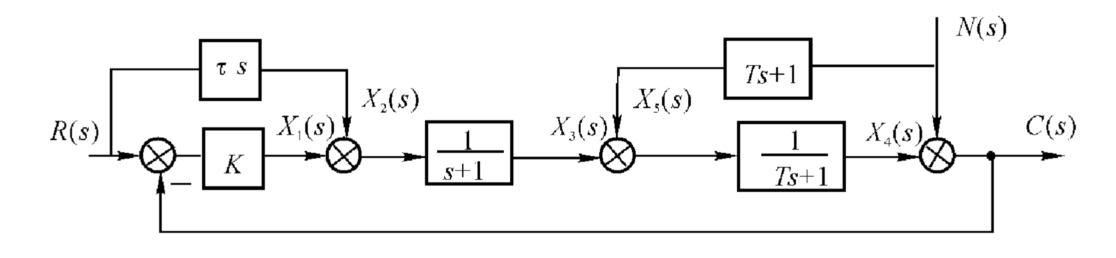
$$C(s)=X_4(s)+N(s)$$

$$X_5(s)=(Ts+1)N(s)$$

对每个方程做相应的子结构图，如图 2.6(a)所示，接顺序连接各子结构图，得系统结构图(如图 2.6(b)所示)。



(a)



(b)

(a) 子结构图；(b) 系统结构图

图 2.6

利用梅逊公式求 $C(s)/R(s)$和 $C(s)/N(s)$。

对于 $C(s)/R(s)$，令 $N(s)=0$，此时系统有 2 条前向通路，1 个回路，传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{\frac{K}{(s+1)(Ts+1)}+\tau s\frac{1}{(s+1)(Ts+1)}}{1+\frac{K}{(s+1)(Ts+1)}}=$$

$$\frac{\tau s+K}{Ts^2+(T+1)s+1+K}$$

对 $C(s)/N(s)$，令 $R(s)=0$，此时系统仍然是有 2 条前向通路，1 个回路，传递函数为

$$\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{1+(Ts+1)\frac{1}{Ts+1}}{1+\frac{K}{(s+1)(Ts+1)}}=\frac{2Ts^2+2(T+1)s+2}{Ts^2+(T+1)s+1+K}$$

例 **2.7**　已知某被控对象的动态方程为

$$\ddot{x}_1(t)+C_1\dot{x}_1(t)+C_2x_2(t)+C_3x_3(t)=0$$
$$\dot{x}_1(t)-\dot{x}_2(t)-C_4x_2(t)=0$$
$$\ddot{x}_4(t)+C_5\dot{x}_4(t)+C_6x_5(t)=0$$

式中，$x_3(t)$，$x_5(t)$为被控对象的输入量；$x_1(t)$和 $x_4(t)$为被控对象的输出量。要求绘制方块图，求输入、输出之间的传递函数。

再设控制装置的方程为

$$x_3(t)=K_1\dot{x}_1(t)+K_2x_1(t)+K_5[x_4(t)-u]$$
$$x_5(t)=K_3\dot{x}_4(t)+K_4x_4(t)-K_6[x_1(t)-u]$$

其中 u 为系统的输入信号，由控制器方程式和所得被控对象传递函数画出系统的结构图。

解　对被控对象动态方程在零初始条件下做拉氏变换有

$$s^2X_1(s)+C_1sX_1(s)+C_2X_2(s)+C_3X_3(s)=0 \tag{1}$$

$$sX_1(s)-sX_2(s)-C_4X_2(s)=0 \tag{2}$$

$$s^2X_4(s)+C_5sX_4(s)+C_6X_5(s)=0 \tag{3}$$

由式(2)得

$$X_2(s)=\frac{s}{s+C_4}X_1(s) \tag{4}$$

将式(4)代入式(1)并整理，得

$$G_1(s)=\frac{X_1(s)}{X_3(s)}=-\frac{C_3(s+C_4)}{s[s^2+(C_1+C_4)s+C_1C_4+C_2]}$$

由式(3)可得

$$G_2(s)=\frac{X_4(s)}{X_5(s)}=-\frac{C_6}{s(s+C_5)}$$

其方块图如图 2.7(a)所示。

再对控制装置方程做零初始条件下的拉氏变换有

$$X_3(s)=K_1sX_1(s)+K_2X_1(s)+K_5[X_4(s)-U(s)]$$
$$X_5(s)=K_3sX_4(s)+K_4X_4(s)-K_6[X_1(s)-U(s)]$$

控制系统结构图如图 2.7(b)所示。

例 **2.8**　求图 2.8(a)所示系统的传递函数$\dfrac{C(s)}{R(s)}$。

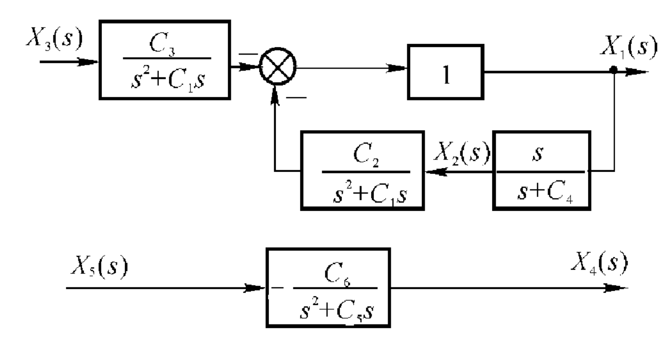
解法 **1**　结构图变换如图 2.8 所示。

则

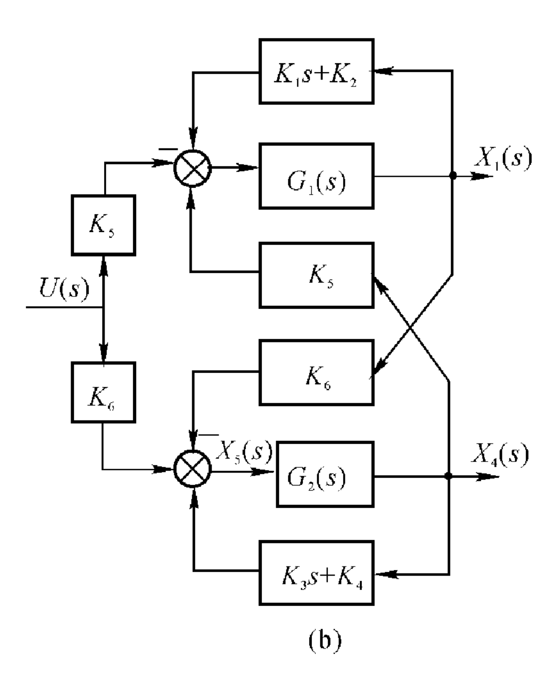
$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=$$

$$\left(1+\frac{G_2}{G_1}\right)\frac{\dfrac{G_1}{1+G_1H_1}G_3\dfrac{G_4}{1+G_4H_2}}{1+\dfrac{G_1}{1+G_1H_1}G_3\dfrac{G_4}{1+G_4H_2}\left(\dfrac{H_3}{G_1}-\dfrac{1}{G_1G_4}\right)}=$$

$$\frac{G_1G_3G_4+G_2G_3G_4}{1+G_1H_1+G_4H_2+G_3G_4H_3-G_3+G_1G_4H_1H_2}$$



(a)



(b)

图 2.7 例 2.7 图

(a) 被控对象框图;(b) 控制系统框图

解法 **2** 用梅逊公式计算。

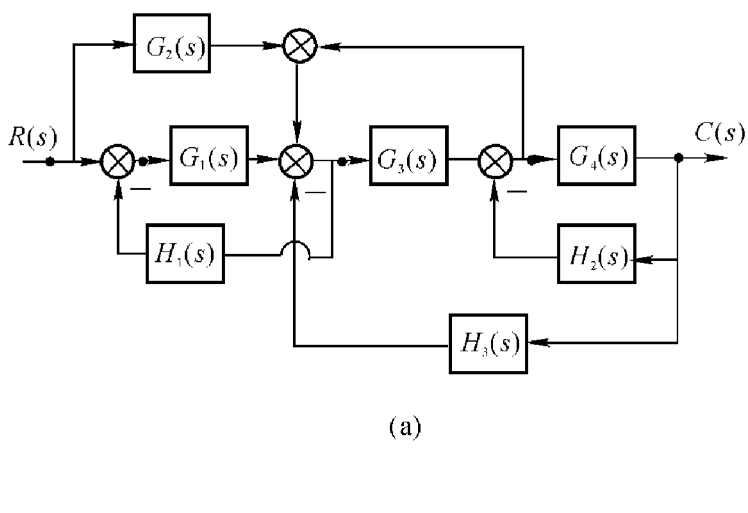
有两条前向通路

$$P_1=G_1G_3G_4$$

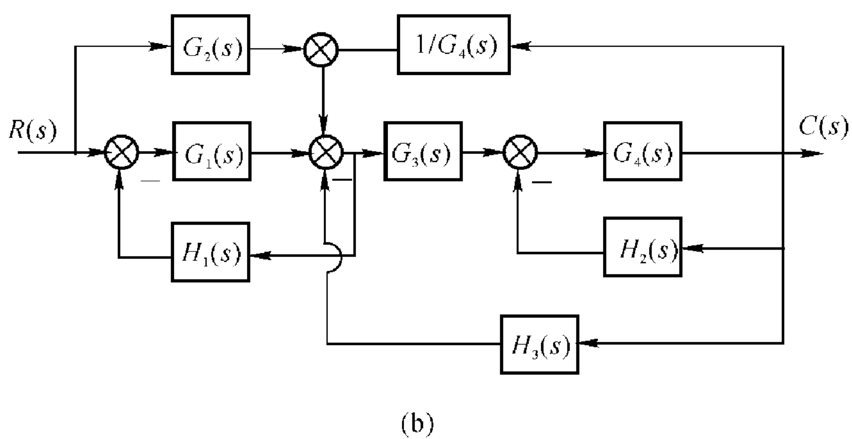
$$P_2=G_2G_3G_4$$

有 4 个回路

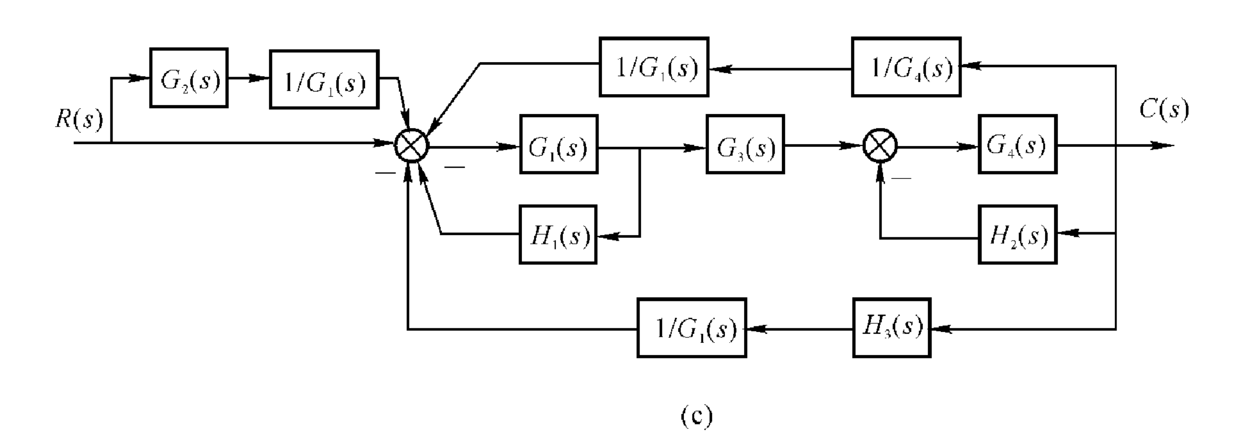
$$L_1=-G_1H_1$$



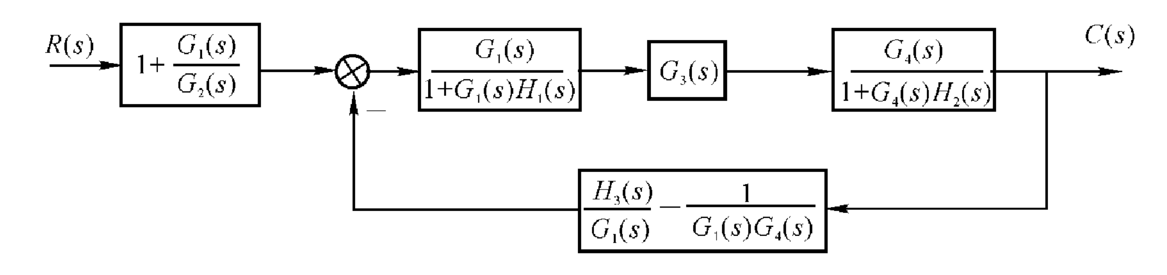
(a)



(b)



(c)



(d)

图 2.8　结构图变换过程

$$L_2=-G_4H_2$$
$$L_3=-G_3G_4H_3$$
$$L_4=G_3$$

其中 L_1 和 L_2 不相接触,则

$$\Delta=1+G_1H_1+G_4H_2+G_3G_4H_3-G_3+G_1G_4H_1H_2$$
$$\Delta_1=\Delta_2=1$$

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}=$$
$$\frac{G_1G_3G_4+G_2G_3G_4}{1+G_1H_1+G_4H_2+G_3G_4H_3-G_3+G_1G_4H_2H_2}$$

【点评】 用梅逊公式计算时,亦可先绘制出系统的信号流图。对于本题绘制信号流图时,须先将各端号信号标记出来,如图 2.8(a)所示。然后绘制信号流图如图 2.9 所示。可以看出系统有 2 条前向通路,有 4 个回路。

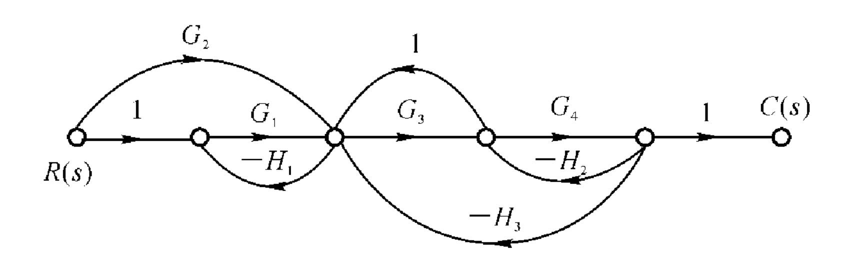


图 2.9 信号流图系统

例 **2.9** 控制系统结构如图 2.10(a)所示,求系统的闭环传递函数。

解 解法 **1** 用方块图简化的方法:

则

$$\Phi(s)=\left(G_4(s)+\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)H_1(s)}\right)\times$$
$$\frac{G_3(s)}{1+\left(H_2(s)+\frac{G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)}{1+G_1(s)H_1(s)}\right)G_3(s)}=$$
$$\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)+G_3(s)G_4(s)(1+G_1(s)H_1(s))}{1+G_1(s)H_1(s)+G_3(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)G_3(s)H_1(s)H_2(s)+G_1(s)H_1(s)G_3(s)H_2(s)}$$

解法 **2** 绘制系统的信号流图,利用梅逊公式求闭环传递函数。

将图 2.10(a)中各端口信号标注出来,然后依之画出信号流图如图 2.11 所示。

有 2 条前向通路,$P_1=G_1G_2G_3$,$P_2=G_4G_3$,3 个回路,$L_1=-G_1H_1$(与 P_2 不接触),$L_2=-G_3H_2$,$L_3=-G_1G_2G_3H_1H_2$,其中 L_1 与 L_2 不相接触,则

$$\Delta=1+G_1H_1+G_3H_2+G_1G_2G_3H_1H_2+G_1H_1G_3H_2$$

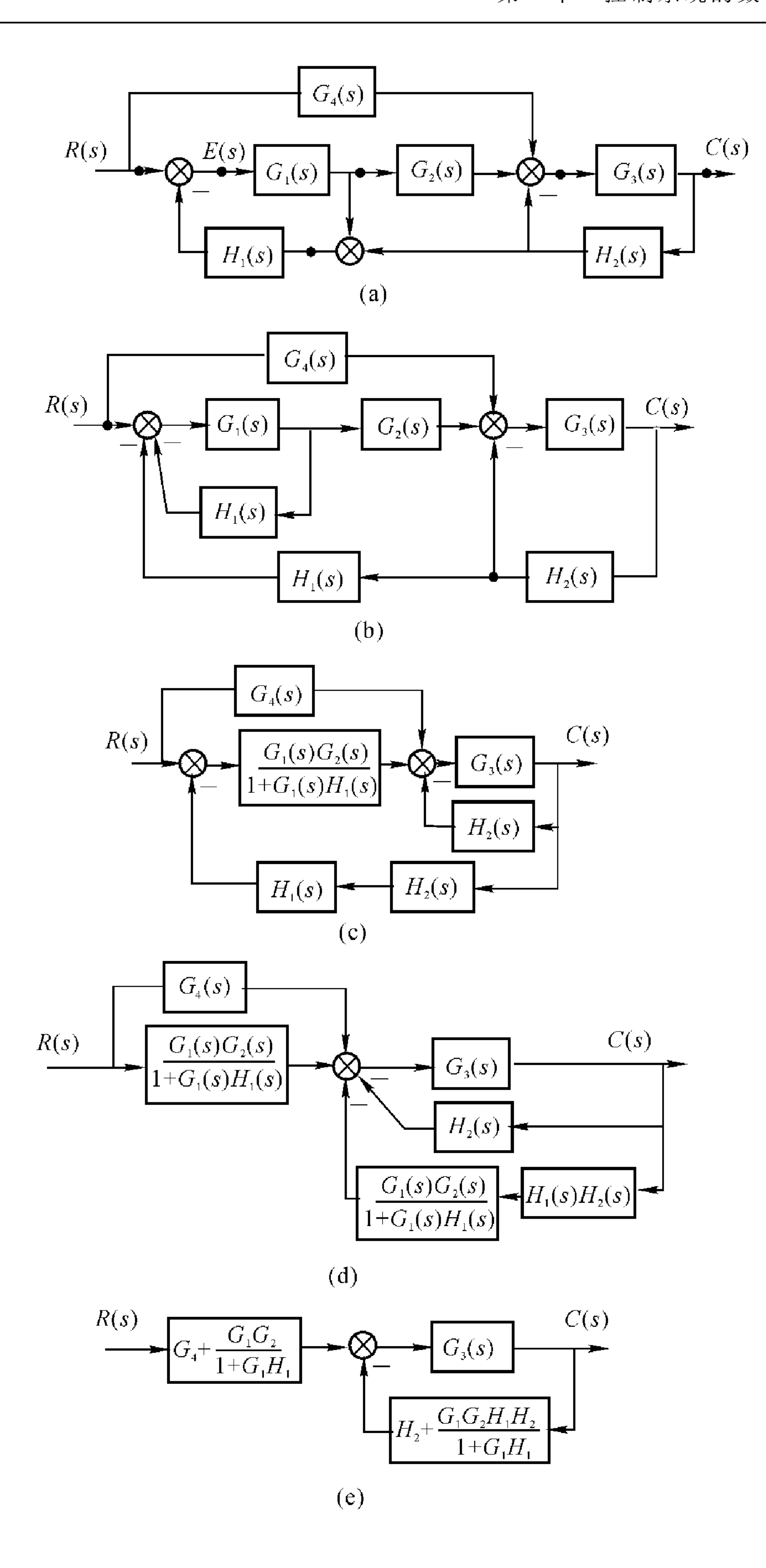


图 2.10 结构图等效变换

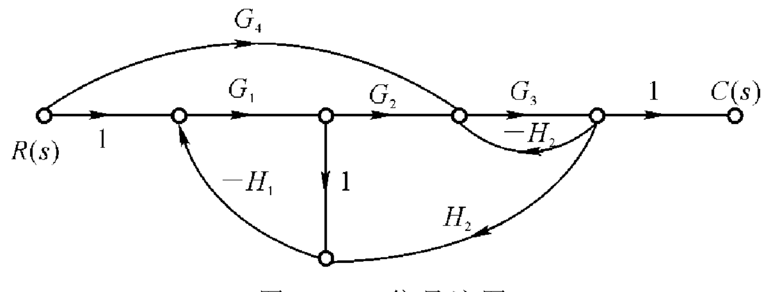


图 2.11 信号流图

$$\Delta_1=1,\ \Delta_2=1+G_1H_1$$

则闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}=$$

$$\frac{G_1G_2G_3+G_4G_3(1+G_1H_1)}{1+G_1H_1+G_3H_2+G_1G_2G_3H_1H_2+G_1H_1G_3H_2}$$

【点评】 利用梅逊公式计算系统的闭环传递函数,亦可不绘制系统的信号流图。

例 **2.10** 将图 2.12 交叉反馈系统化简并求系统传递函数。

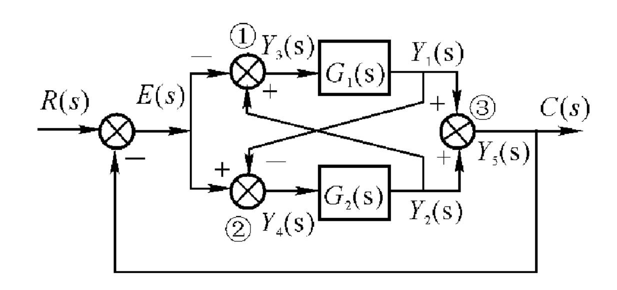


图 2.12 系统结构图

解 解法 **1** 先将 G_2 与左边相加点移位,如图 2.13(a)所示;再把引出点和相加点互移位,如图 2.13(b)所示。

将相加点合并成图 2.13(c),并联支路合并为图 2.13(d)所示,然后得图 2.13(e),得开环传递函数

$$G_k(s)=G_2+\frac{G_1(G_2-1)(1-G_2)}{1+G_1G_2}=\frac{2G_1G_2+G_2-G_1}{1+G_1G_2}$$

因而,闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{G_k(s)}{1+G_k(s)}=\frac{2G_1G_2+G_2-G_1}{1+3G_1G_2+G_2-G_1}$$

解法 **2** 从图 2.13 中相加点③可以看出前向通路由 2 支组成。第 1 支有两部分到相加点,从 $E(s)$开始走上面经 G_1 到相加点③,和从 $E(s)$开始经 G_2 到相加点①,再经 G_1 到相加点③;第 2 支同样有两部分到相加点。如此画

出前向通路。

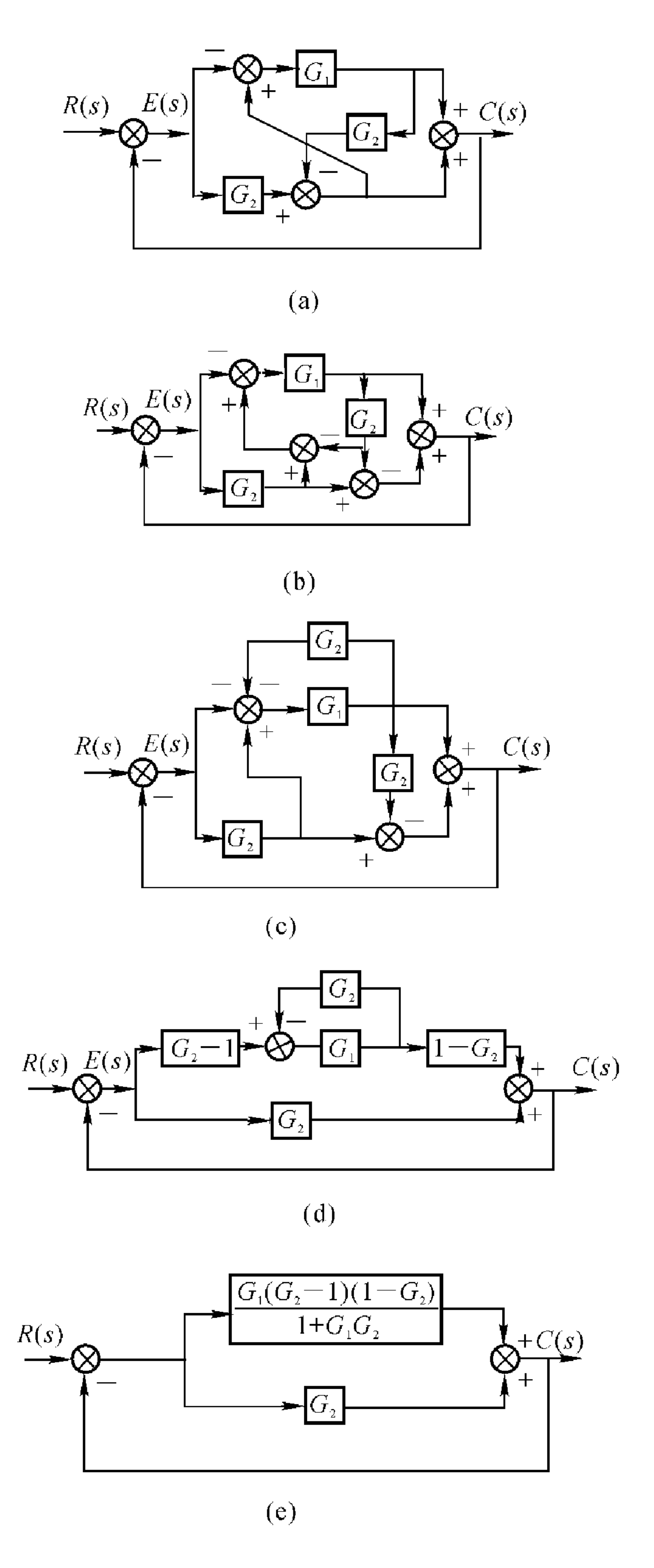


图 2.13　结构图化简

再看反馈回路:上述第 1 支前向通路的反馈从 G_1 经相加点②,再经 G_2 后反馈到第①相加点。同样第 2 支前向通路的反馈也可画出,见图 2.14(a)。

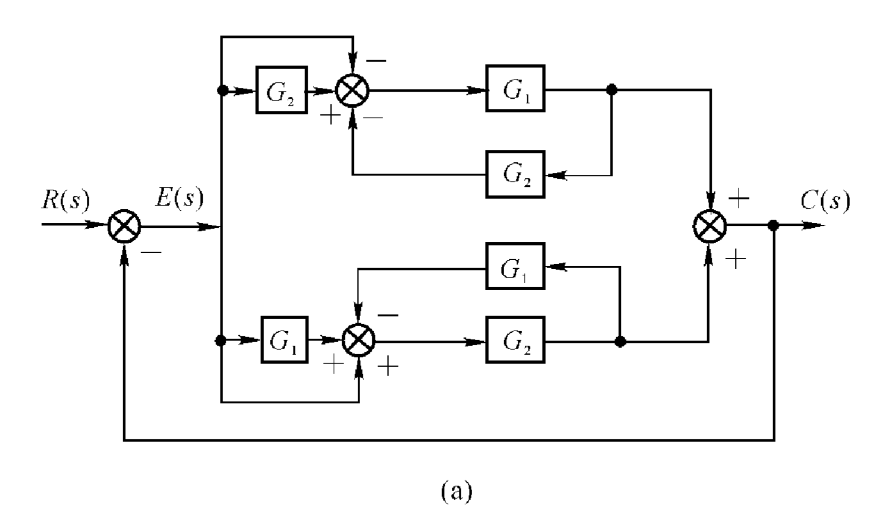
化简后成图 2.14(b),从图 2.14(b)中可得开环传递函数

$$G_k(s)=\frac{G_1(G_2-1)}{1+G_1G_2}+\frac{G_2(G_1+1)}{1+G_1G_2}=\frac{2G_1G_2+G_2-G_1}{1+G_1G_2}$$

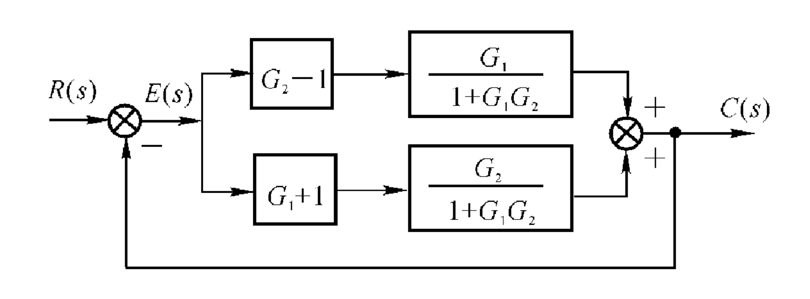
同样

$$\Phi(s)=\frac{G_k(s)}{1+G_k(s)}=\frac{2G_1G_2+G_2-G_1}{1+3G_1G_2+G_2-G_1}$$

如果本题中未要求用结构图化简的方法求闭环传递函数,那么还可以用其他方法求取系统的传递函数。下面讨论用联立方程组法和梅逊公式法求解图 2.12 所示系统的传递函数。



(a)



(b)

图 2.14 结构图化简

解法 3 用联立方程组求解,由图 2.12 可列出下列两式

$$Y_1(s)=[Y_2(s)-E(s)]G_1(s)$$

$$Y_2(s)=[E(s)-Y_1(s)]G_2(s)$$

由以上两式可求得

$$Y_1(s)=\frac{G_1 s)G_2(s)-G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}E(s)$$

$$Y_2(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)+G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}E(s)$$

$$C(s)=Y_1(s)+Y_2(s)=$$

$$\frac{2G_1(s)G_2(s)+G_2(s)-G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}E(s)$$

而
$$E(s)=R(s)-C(s)$$

联立上两式,可求出

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{2G_1(s)G_2(s)+G_2(s)-G_1(s)}{1+3G_1(s)G_2(s)+G_2(s)-G_1(s)}$$

解法4　用梅逊公式求解。绘制系统信号流图如图 2.15,系统有 4 条前向通路,5 个回路,分别是

$$P_1=-G_1,\ P_2=G_1G_2,\ P_3=G_2,\ P_4=G_2G_1$$

$$L_1=G_1,\ L_2=-G_1G_2,\ L_3=-G_2,\ L_4=-G_2G_1,\ L_5=-G_1G_2$$

由于回路与回路之间均相接触,则

$$\Delta=1+3G_1G_2+G_2-G_1$$

又由于回路与前向通路也相接触,则

$$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=\Delta_4=1$$

则系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{2G_1G_2+G_2-G_1}{1+3G_1G_2+G_2-G_1}$$

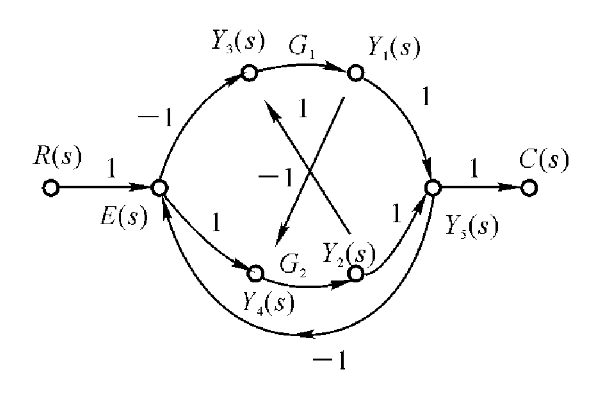


图 2.15　信号流图

【点评】　从本例可以看出,求系统闭环传递函数的方法是多样的。仅结构图等效化简就有不同的方法,但结果是一样的。

使用结构图等效化简求传递函数时,要认真注意每一步的等效性,这样才能保证结果

准确无误。

用梅逊公式求传递函数的关键是将结构图中的前向通路和回路全部找到，不得遗漏，并分析清楚回路与前向通路、回路与回路之间相接触的情况，做题时亦要认真。

一般说，用梅逊公式求解比较方便，但在系统分析中，常须将结构图进行局部等效变换，所以两种方法都必须熟练掌握。

例 **2.11** 系统结构图如图 2.16 所示，求 $C(s)/R(s)$。

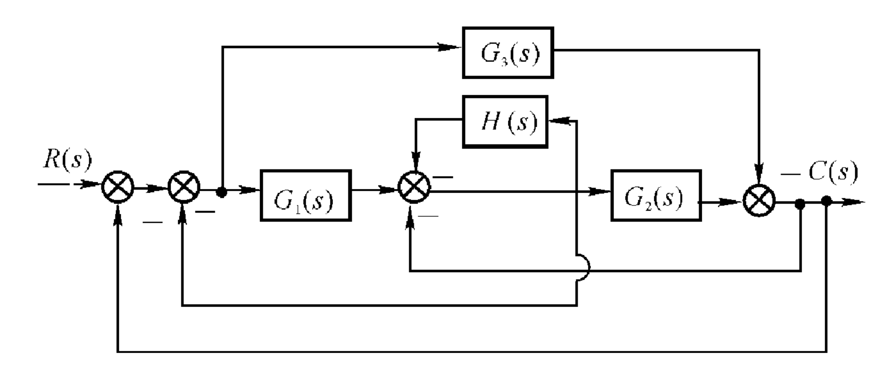


图 2.16 系统结构图

解法 **1** 用结构图等效化简方法求解，见图 2.17。化简得

$$\Phi(s)=\frac{G_1G_2-(1+H)G_3}{1+G_1+G_2+H+G_1G_2-G_3H}$$

解法 **2** 用梅逊公式求解。本系统结构图有 2 条前向通路，6 个回路，其中有一组两两互不接触回路。

$$\Delta=1-\{-H-G_2-G_1-G_1G_2-(-G_3)-[-(-G_3)]\}+[-(-G_3)](-H)=$$
$$1+H+G_2+G_1+G_1G_2-G_3H$$

$$P_1=G_1G_2,\ \Delta_1=1$$

$$P_2=-G_3,\ \Delta_2=1-(-H)=1+H$$

故
$$\Phi(s)=\frac{G_1G_2-G_3(1+H)}{1+H+G_2+G_1+G_1G_2-G_3H}$$

例 **2.12** 某控制系统如图 2.18(a)所示，分别求传递函数$\frac{C_1(s)}{R_1(s)}$，$\frac{C_1(s)}{R_2(s)}$，$\frac{C_1(s)}{R_2(s)}$和$\frac{C_2(s)}{R_2(s)}$。

解　解法 **1** 将 R_2 输入端的比较点合并，环节 $G_1(s)$输出端的引出点后移，并将反馈回路化简运算，得图 2.18(b)。

(1) 求$\frac{C_1(s)}{R_1(s)}$。

令 $R_2(s)=0$，图 2.18(b)进一步化简为图 2.18(c)，则

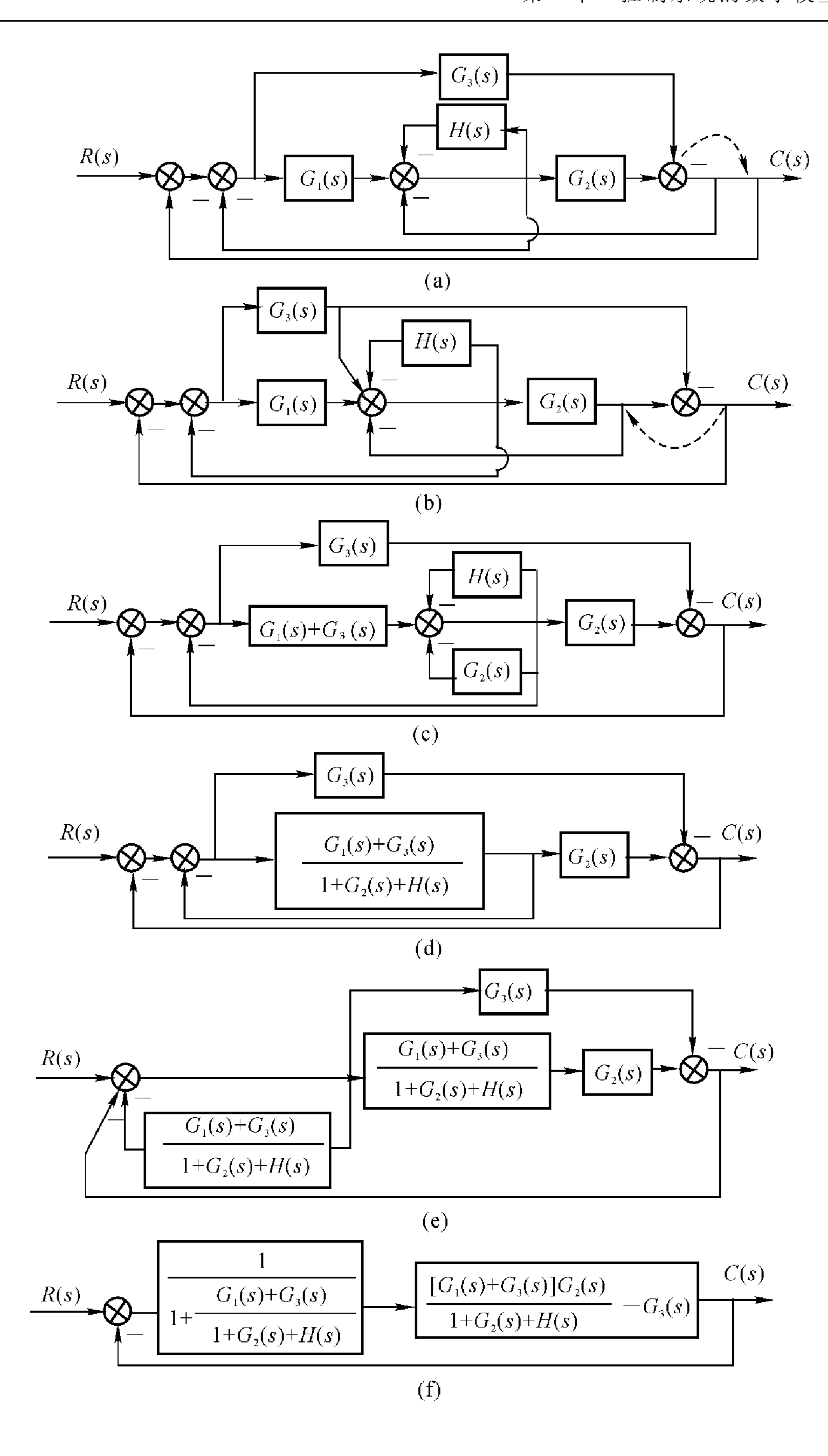
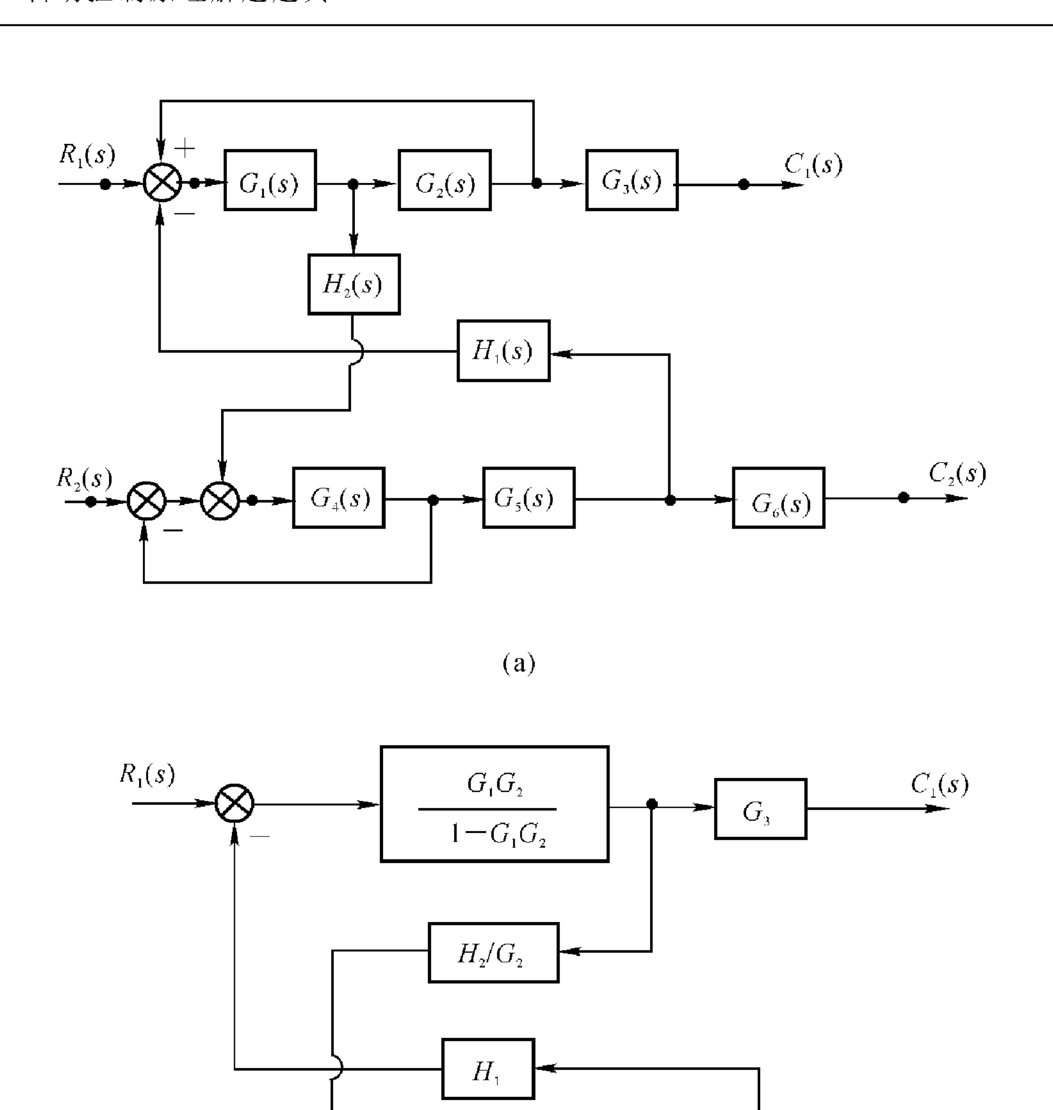
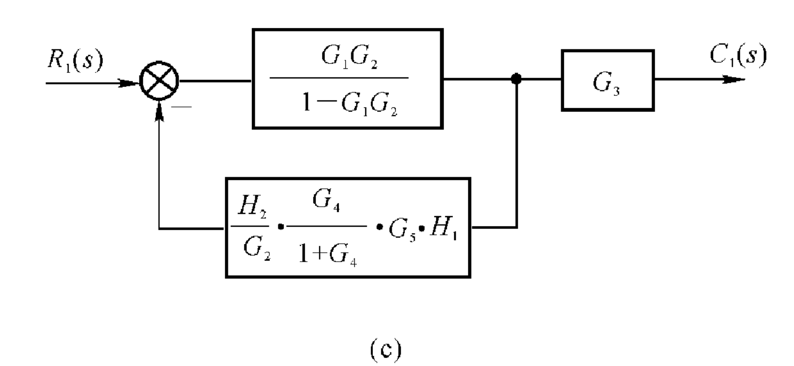


图 2.17　等效化简方法求传递函数


R1(s)
+
G1(s)
G2(s)
G3(s)
C1(s)
−
H2(s)
H1(s)
R2(s)
G4(s)
G5(s)
G6(s)
C2(s)
−
R1(s)
G1G2
1−G1G2
G3
C1(s)
−
H2/G2
H1
R2(s)
G4
1+G4
G5
G6
C2(s)

(a)

(b)


R1(s)
G1G2
1−G1G2
G3
C1(s)
−
H2/G2 · G4/(1+G4) · G5 · H1

(c)

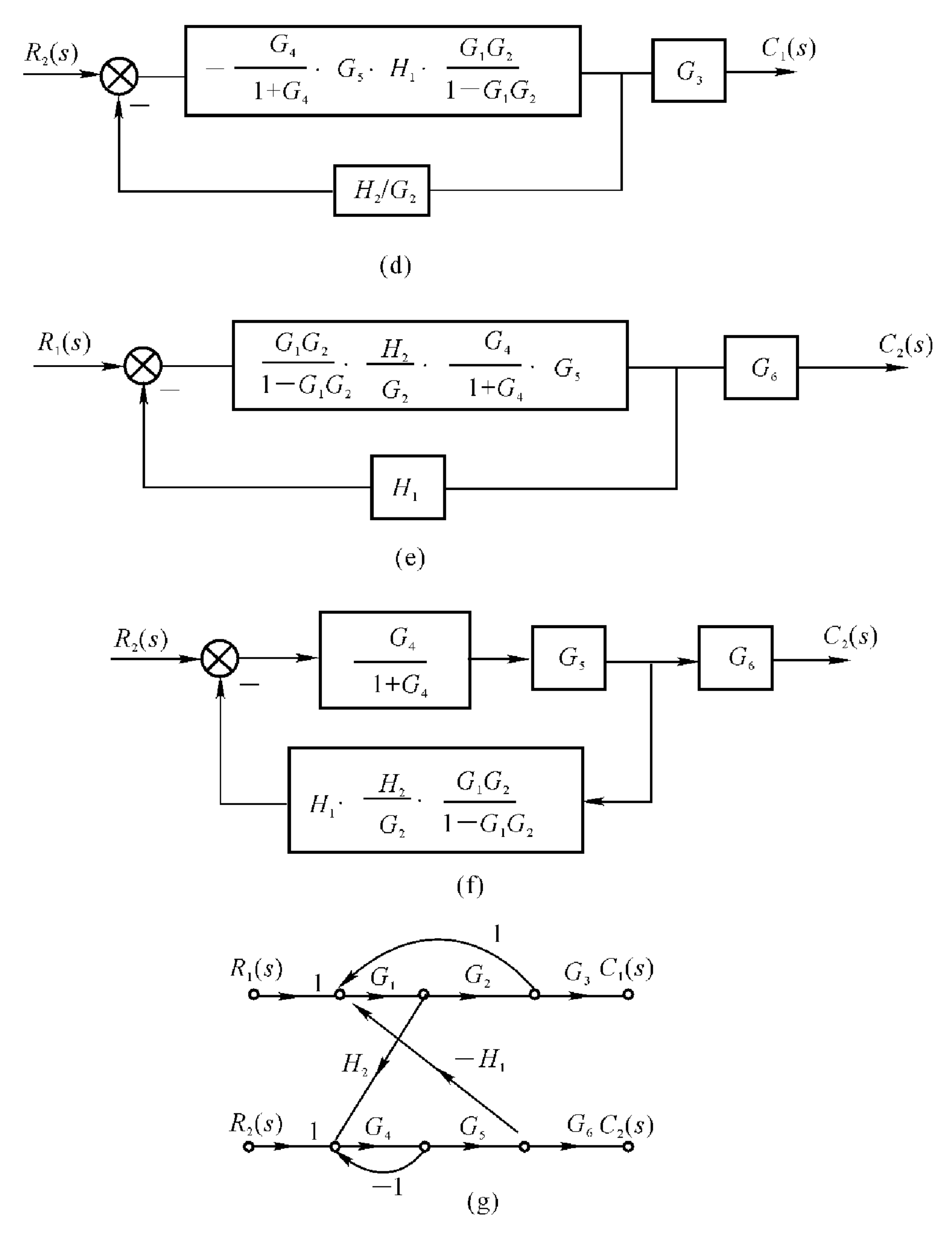


图 2.18　系统结构图变换

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)}=\frac{\frac{G_1G_2}{1-G_1G_2}G_3}{1+\frac{G_1G_2}{1-G_1G_2}\frac{G_4G_5H_1H_2}{G_2(1+G_4)}}=$$

$$\frac{G_1G_2G_3+G_1G_2G_3G_4}{1+G_4-G_1G_2-G_1G_2G_4+G_1G_4G_5H_1H_2}$$

(2) 求$\frac{C_1(s)}{R_2(s)}$。

令 $R_1(s)=0$,图 2.18(b)化简为图 2.18(d),则

$$\frac{C_1(s)}{R_2(s)}=\frac{-\frac{G_4G_5H_1G_1G_2}{(1+G_4)(1-G_1G_2)}G_3}{1+\frac{G_4G_5H_1G_1G_2}{(1+G_4)(1-G_1G_2)}\frac{H_2}{G_2}}=$$

$$\frac{-G_1G_2G_3G_4G_5H_1}{1+G_4-G_1G_2-G_1G_2G_4+G_1G_4G_5H_1H_2}$$

(3) 求$\frac{C_2(s)}{R_1(s)}$。

令 $R_2(s)=0$,图 2.18(b)化简为图 2.18(c),则

$$\frac{C_2(s)}{R_1(s)}=\frac{\frac{G_1G_2H_2G_4G_5G_6}{(1-G_1G_2)G_2(1+G_4)}}{1+\frac{G_1G_2H_2G_4G_5}{(1-G_1G_2)G_2(1+G_4)}H}=$$

$$\frac{G_1G_4G_5G_6H_2}{1+G_4-G_1G_2-G_1G_2G_4+G_1G_4G_5H_1H_2}$$

(4) 求$\frac{C_2(s)}{R_2(s)}$。

令 $R_1(s)=0$,图 2.18(b)化简为图 2.18(f),则

$$\frac{C_2(s)}{R_2(s)}=\frac{\frac{G_4}{1+G_4}G_5G_6}{1+\frac{G_4G_5}{1+G_4}\frac{H_1H_2G_1G_2}{G_2(1-G_1G_2)}}=$$

$$\frac{G_4G_5G_6-G_1G_2G_4G_5G_6}{1+G_4-G_1G_2-G_1G_2G_4+G_1G_4G_5H_1H_2}$$

解法 2 采用梅逊公式计算,先绘制系统的信号流图,如图 2.18(g)所示。

(1) 求$\frac{C_1(s)}{R_1(s)}$。

令 $R_2(s)=0$,系统有 1 条前向通路 $P_1=G_1G_2G_3$;有 3 个回路 $L_1=G_1G_2$,$L_2=-G_4$,$L_3=-G_1H_2G_4G_5H_1$。其中 L_1 与 L_2 互不接触,且 L_2 与 P_1 不接触,则

$$\Delta=1-G_1G_2+G_4+G_1G_4G_5H_1H_2-G_1G_2G_4$$

$$\Delta_1=1+G_4$$

则 $$\frac{C_1(s)}{R_1(s)}=\frac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{G_1G_2G_3(1+G_4)}{1-G_1G_2+G_4+G_1G_4G_5H_1H_2-G_1G_2G_4}$$

(2) 求$\frac{C_1(s)}{R_2(s)}$。

令 $R_1(s)=0$,有 1 条前向通路 $P_1=-G_4G_5H_1G_1G_2G_3$;有 3 个回路 $L_1=G_1G_2$,$L_2=-G_4$,$L_3=-G_4G_5H_1G_1H_2$,其中 L_1 与 L_2 互不接触。

没有与 P_1 不接触的回路，则

$$\Delta=1-G_1G_2+G_4+G_4G_5H_1G_1G_2-G_1G_2G_4$$

$$\Delta_1=1$$

$$\frac{C_1(s)}{R_2(s)}=\frac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{-G_1G_2G_3G_4G_5H_1}{1-G_1G_2+G_4+G_1G_4G_5H_1H_2-G_1G_2G_4}$$

(3) 求$\dfrac{C_2(s)}{R_1(s)}$。

令 $R_2(s)=0$，有 1 条前向通路 $P_1=G_1H_2G_4G_5G_6$，有三个回路，$L_1=G_1G_2$，$L_2=-G_4$，$L_3=-G_1H_2G_4G_5H_1$，其中 L_1 与 L_2 互不接触，则

$$\Delta=1-G_1G_2+G_4+G_1G_4G_5H_1H_2-G_1G_2G_4$$

$$\frac{C_2(s)}{R_1(s)}=\frac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{G_1G_4G_5G_6H_2}{1-G_1G_2+G_4+G_1G_4G_5H_1H_2-G_1G_2G_4}$$

(4) 求$\dfrac{C_2(s)}{R_2(s)}$。

令 $R_1(s)=0$，有 1 条前向通路 $P_1=G_4G_5G_6$；有 3 个回路 $L_1=G_1G_2$，$L_2=-G_4$，$L_3=-G_4G_5H_1G_1H_2$，其中 L_1 与 L_2 互不接触。L_2 与 P_1 不接触，则

$$\Delta=1-G_1G_2+G_4+G_1G_4G_5H_1H_2-G_1G_2G_4$$

$$\Delta_1=1-G_1G_2$$

则

$$\frac{C_2(s)}{R_2(s)}=\frac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{G_4G_5G_6(1-G_1G_2)}{1-G_1G_2+G_4+G_1G_4G_5H_1H_2-G_1G_2G_4}$$

第三章

线性系统的时域分析法

例 **3.1**　系统结构图如图 3.1 所示，已知传递函数

$$G(s)=\frac{10}{0.2s+1}$$

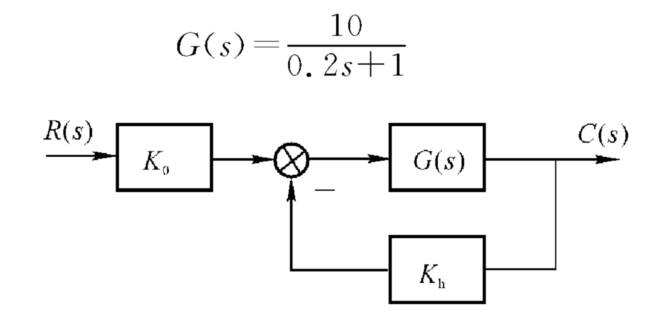


图 3.1　系统结构图

今欲采用加负反馈的办法，将调节时间 t_s 减小为原来的 0.1 倍，并保证总的放大倍数不变。试确定参数 K_h 和 K_0。

解　由题意知，加反馈的一阶系统的时间常数应为原系统的 0.1 倍，闭环增益保持不变，则加反馈的系统传递函数应为

$$\Phi(s)=\frac{10}{0.02s+1}$$

由结构图知

$$\Phi(s)=\frac{K_0G(s)}{1+K_hG(s)}=\frac{10K_0}{0.2s+1+10K_h}=\frac{\dfrac{10K_0}{1+10K_h}}{\dfrac{0.2}{1+10K_h}s+1}$$

则有

$$\begin{cases}\dfrac{10K_0}{1+10K_h}=10\\[2ex]\dfrac{0.2}{1+10K_h}=0.02\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} K_h = 0.9 \\ K_0 = 10 \end{cases}$$

【点评】　一阶系统闭环传递函数的标准形式为

$$\Phi(s) = \frac{K_\Phi}{Ts+1}$$

其中：T 为时间常数，决定系统响应的快慢程度，调节时间 $t_s = 3T(\Delta = 5\%)$。K_Φ 为闭环增益，是系统总的放大倍数，只影响输出响应的幅值，不影响动态性能指标。

例 **3.2**　温度计是一阶系统，其传递函数 $\Phi(s) = \frac{1}{Ts+1}$，用其测量容器内的水温，1 min 才能显示出该温度的 98% 的数值。若加热容器使水温按 10 ℃/min的速度均匀上升，问温度计的稳态指示误差有多大？

解　对于一阶系统，首先要根据题目已知条件确定特征参数 T。

由一阶系统阶跃响应动态性能指标可知，$t_s = 4T$ 时响应可达到稳态值的 98%，所以

$$t_s = 4T = 1 \text{ min}$$

由此

$$T = 0.25 \text{ min}$$

系统的输入信号是 $r(t) = 10t$，$R(s) = \frac{10}{s^2}$。计算稳态误差有两种方法。

解法 **1**　利用终值定理计算。

依题意知

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

则

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \Phi(s) = \frac{Ts}{Ts+1}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{Ts}{Ts+1}\frac{10}{s^2} = 10T = 2.5 \text{ ℃}$$

解法 **2**　用静态误差系数法求解。

视温度计为单位反馈系统，则开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{Ts}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{1}{T}$$

$$e_{ss} = \frac{R}{K_v} = \frac{10}{\frac{1}{T}} = 10T = 2.5 \text{ ℃}$$

例 **3.3** 3 个二阶系统的闭环传递函数形式都是 $\Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$，它们的单位阶跃响应分别如图 3.5(a)中①②③所示，其中 t_{s1}，t_{s2} 是系统①，②的调节时间，t_{p1}，t_{p2}，t_{p3} 是峰值时间，在同一 s 平面中画出 3 个系统闭环极点相对位置，并说明理由。

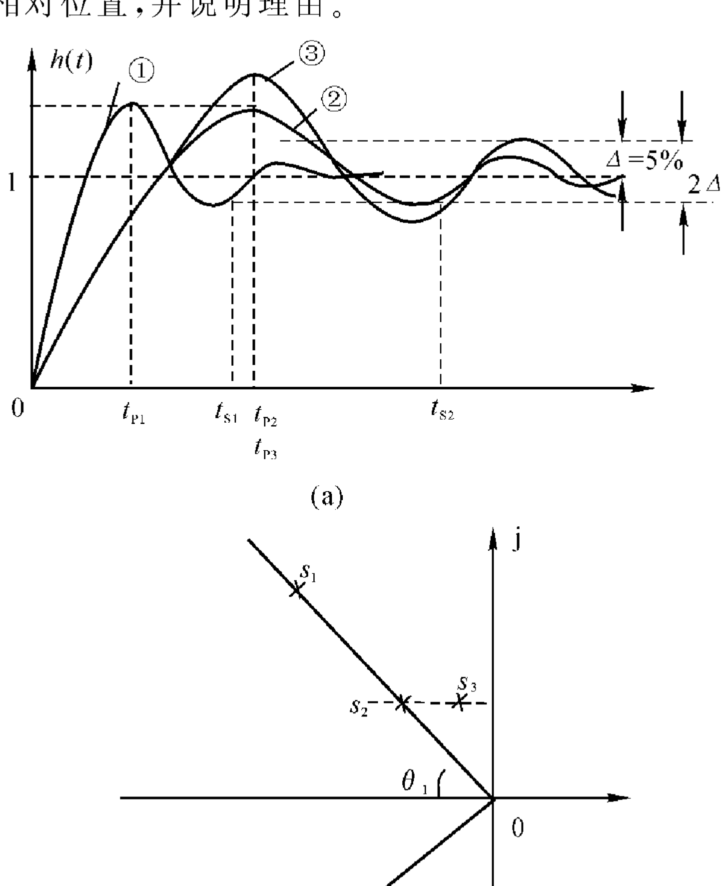


图 3.2 例 3.3 题图

解 设 3 个系统的闭环极点分别是 $s_1, s_1^*, s_2, s_2^*, s_3, s_3^*$。由图 3.2(a)可知

$$\sigma_1\% = \sigma_2\%$$

$$\xi_1=\xi_2, \theta_1=\theta_2$$

s_1, s_2 在同一阻尼比线上，又

$$t_{s1}<t_{s2}, \ \xi_1\omega_{n1}>\xi_2\omega_{n2}$$

$$\omega_{n1}>\omega_{n2}$$

所以 s_1 离虚轴(原点)比 s_2 远。又因为

$$t_{p2}=t_{p3}，\omega_{n2}\sqrt{1-\xi_2^2}=\omega_{n3}\sqrt{1-\xi_3^2}$$

即 s_2 与 s_3 的虚部相等。

又

$$\sigma_3\%>\sigma_2\%$$

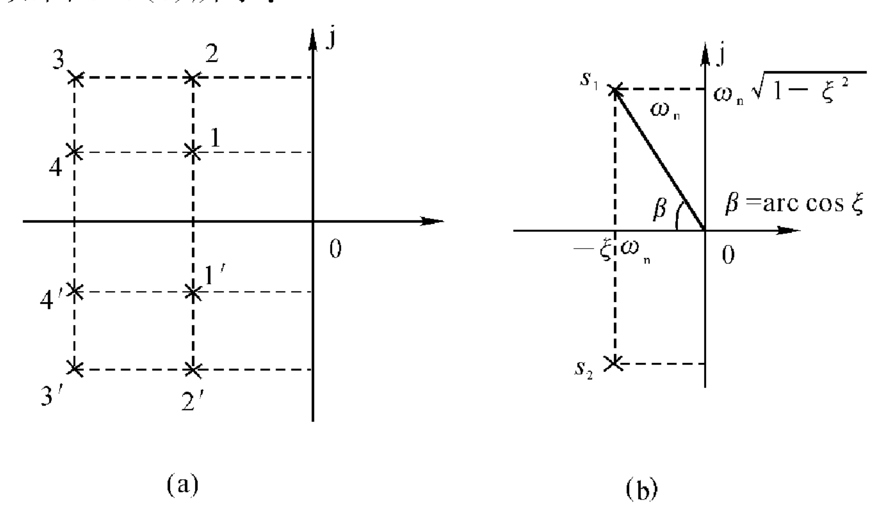
所以

$$\xi_3<\xi_2，\theta_3>\theta_2$$

最终可确定 3 个系统闭环极点的相对位置如图 3.2(c)所示。

例 **3.4**　已知 4 个二阶系统的闭环极点分布图如图 3.3(a)所示。试按表格形式比较它们的性能。

解　如图 3.3(c)所示：



组别＼系统＼比较项目		振荡频率（高、低）	阻尼系数（大、中、小）	衰减速度（快、慢）
Ⅰ	1	低	中	慢
	2	高	小	慢
Ⅱ	1	低	中	慢
	3	高	中	快
Ⅲ	1	低	中	慢
	4	低	大	快

(c)

图 3.3　二阶系统闭环极点分布及性能比较

【点评】　例 3.3 与例 3.4 均强调闭环极点位置与系统相应的动态性能之间的关系。

所以要熟练掌握：

(1) 如图3.3(b)所示。二阶欠阻尼情况($0<\xi<1$)动态性能指标计算公式：

峰值时间

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

调节时间

$$t_s=\frac{3.5}{\xi\omega_n}(\Delta=5\%)$$

超调量

$$\sigma\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}\times 100\%$$

(2) 二阶欠阻尼系统闭环极点在复平面的位置

例 **3.5** 系统结构图如图3.4所示。要求系统阻尼比$\xi=0.6$，试确定K_t值并计算动态性能指标($t_p,t_s,\sigma\%$)

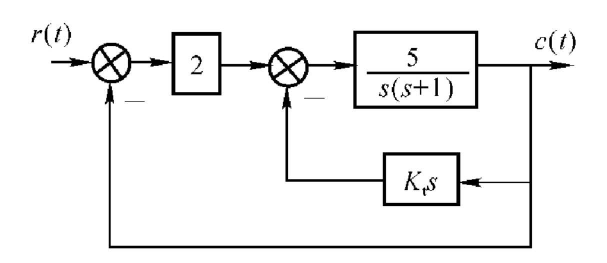


图3.4 系统结构图

解 由结构图，闭环系统的传递函数

$$\Phi(s)=\frac{2\frac{5}{s(s+1)}}{1+2\frac{5}{s(s+1)}+\frac{5K_t s}{s(s+1)}}=\frac{10}{s^2+(1+5K_t)s+10}$$

与二阶系统传递函数的标准形式相比较，有

$$\begin{cases}\omega_n^2=10\\2\xi\omega_n=1+5K_t\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\omega_n=3.16\\K_t=0.56\ (因为\ \xi=0.6)\end{cases}$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=1.24\ \text{s}$$

$$t_s=\frac{3.5}{\xi\omega_n}=1.86\ \text{s}$$

$$\sigma\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}\times 100\%=9.5\%$$

例 **3.6**　设电子心律起搏器系统如图 3.5 所示,其中模仿心脏的传递函数相当于一纯积分器。

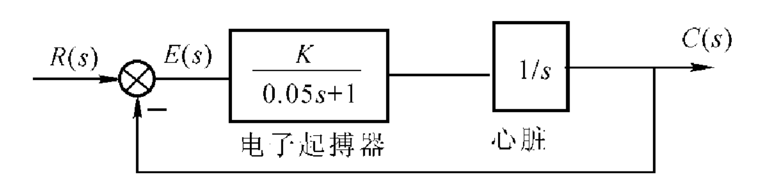


图 3.5　电子心律起搏器系统

(1) 若 $\xi=0.5$ 对应最佳响应,问起搏器增益 K 应取多大?

(2) 若期望心速为 60 次/min,并突然接通起搏器,问 1 s 后实际心速为多少?瞬时最大心速多大?

解　(1) 系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{K}{s(0.05s+1)+K}=\frac{20K}{s^2+20s+20K}$$

所以

$$\begin{cases}20K=\omega_n^2\\20=2\xi\omega_n\end{cases}$$

又由题意知最佳响应时 $\xi=0.5$,代入上式可得

$$K=20,\ \omega_n=20$$

(2) 由题可知

$$r(t)=60\times1(t)$$

$$R(s)=\frac{60}{s}$$

所以

$$C(s)=R(s)\Phi(s)=\frac{60}{s}\times\frac{400}{s^2+20s+400}$$

$$c(t)=\mathscr{L}^{-1}[C(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{60}{s}\times\frac{400}{s^2+20s+400}\right)=$$

$$60-40\sqrt{3}e^{-10t}\sin(10\sqrt{3}t+\frac{\pi}{3})$$

所以
$$c(1)=60.0015\ 次/\text{min}$$

又因为
$$\xi=0.5,\ \omega_n=20$$

所以

$$\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times100\%=16.3\%$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{3.14}{20\times\sqrt{1-(0.5)^2}}=0.18\ \text{s}$$

故瞬时最大心速为 $60\times(1+\sigma\%)=60\times116.3\%=69.78$ 次，发生在 $t=0.18$ s 时刻。

【点评】 典型二阶系统的动态性能指标与系统的特征参数 ξ,ω_n 有关，计算系统动态性能指标的关键在于正确求出系统的特征参数。

例 **3.7** 已知控制系统结构图如图 3.6(a)示。为保证系统的控制精度，要求开环放大系数 $K\geqslant50$，同时要求系统的超调量 $\sigma\%\leqslant5\%$。

(1) 根据现有参数，试分析系统是否满足要求；

(2) 若不满足要求，应做如何改进？

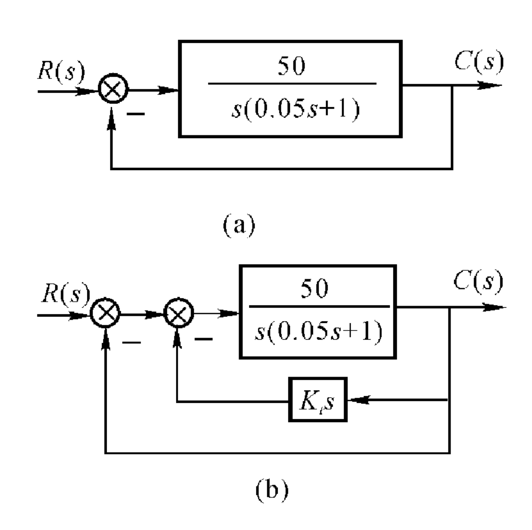


图 3.6 系统结构图

解 从图 3.6(a)可得系统闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{50}{0.05s^2+s+50}=\frac{1\ 000}{s^2+20s+1\ 000}$$

与二阶系统传递函数的标准形式相比较，得

$$\begin{cases}\omega_n^2=1\ 000\\2\xi\omega_n=20\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\omega_n=31.5\ \text{rad/s}\\\xi=0.317\end{cases}$$

此时超调量

$$\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times100\%=35\%$$

可见原系统不满足 $\sigma\%\leqslant5\%$ 的要求。要想减小 $\sigma\%$，只能靠增大系统的阻尼比 ξ 来实现。减小开环增益 K 可以提高阻尼比 ξ，但同时会增大系统的稳态误差，影响系统的控制精度。因此选择测速反馈对系统进行校正，如图 3.6(b)所示。只要合适地选择 K_t，就能使系统的性能指标满足要求。

图 3.6(b)所示系统的闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{50}{s(0.05s+1)}}{1+\dfrac{50}{s(0.05s+1)}+\dfrac{50K_t s}{s(0.05s+1)}}=$$

$$\frac{50}{0.05s^2+(1+50K_t)s+50}=\frac{1\ 000}{s^2+20(1+50K_t)s+1\ 000}$$

与标准的二阶系统的传递函数相比较，得

$$\begin{cases}\omega_n^2=1\ 000\\2\xi\omega_n=20(1+50K_t)\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\omega_n=31.5\ \text{rad/s}\\K_t=\dfrac{2\xi\omega_n-20}{1\ 000}\end{cases}$$

而与要求的$\sigma\%=5\%$相应的阻尼比ξ为

$$\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\ln\frac{1}{\sigma}=\ln 20=3$$

所以

$$\xi=0.69$$

则

$$K_t=\frac{2\xi\omega_n-20}{1\ 000}=0.0234$$

例 **3.8**　已知系统的结构图如图 3.7 所示，要求系统的超调量$\sigma\%=16.3\%$，峰值时间$t_p=1$ s，求K与τ。

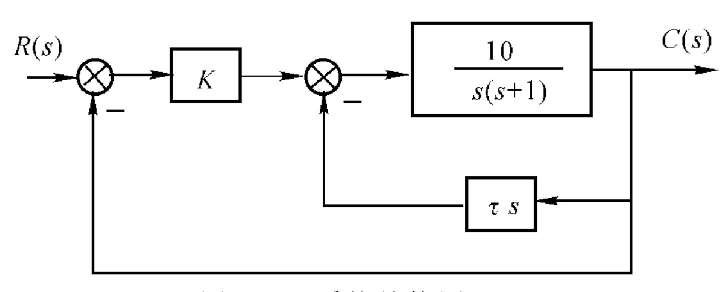


图 3.7　系统结构图

解　首先由要求的动态性能指标$\sigma\%$，t_p，求出系统的特征参数ξ，ω_n。

由

$$\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times100\%=16.3\%$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=1$$

得

$$\xi=0.5,\ \omega_n=3.63\ \text{rad/s}$$

图 3.7 所示系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{K\dfrac{10}{s(s+1)}}{1+K\dfrac{10}{s(s+1)}+\dfrac{10}{s(s+1)}\tau s}=\frac{10K}{s^2+(10\tau+1)s+10K}$$

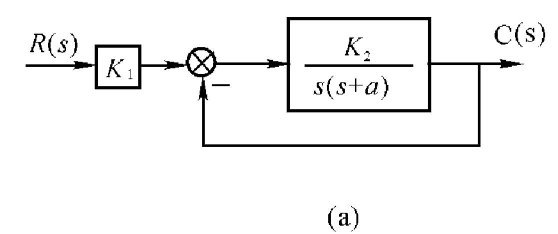
所以

$$10K=\omega_n^2=3.63^2$$

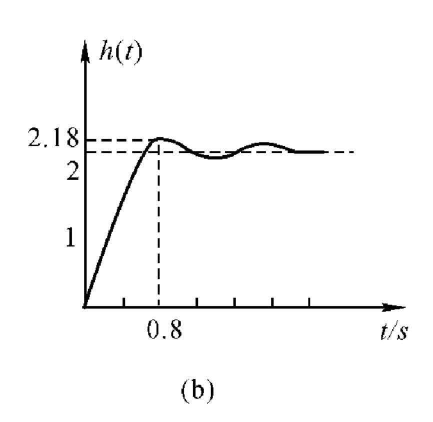
$$10\tau+1=2\xi\omega_n=2\times0.5\times3.63$$

故
$$\begin{cases}K=1.32\\\tau=0.263\end{cases}$$

例 **3.9** 图 3.8(a)所示系统的单位阶跃响应曲线如图 3.8(b)所示，试确定参数 K_1，K_2 和 a。



(a)



(b)

图 3.8

(a) 控制系统结构图；(b) 控制系统单位阶跃响应

解 由图中直接读得

$$h(\infty)=2,\ \sigma\%=\frac{2.18-2}{2}\times100\%=9\%,\ t_p=0.8$$

由图 3.8(a)得系统闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_1K_2}{s^2+as+K_2}$$

因为

$$h(\infty)=\lim_{s\to0}sC(s)=\lim_{s\to0}s\Phi(s)R(s)=$$

$$\lim_{s\to0}\frac{sK_1K_2}{s^2+as+K_2}\frac{1}{s}=K_1=2$$

所以
$$K_1=2$$

利用动态性能指标可计算出系统的特征参数

$$\xi=\sqrt{\frac{(\ln\sigma\%)^2}{\pi^2+(\ln\sigma\%)^2}}=0.608$$

$$\omega_n=\frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\xi^2}}=4.946$$

因为
$$\omega_n^2=K_2,\ 2\xi\omega_n=a$$

所以
$$K_2=24.46,\ a=6.01$$

例 **3.10**　系统的特征方程为

$$s^6+4s^5-4s^4+4s^3-7s^2-8s+10=0$$

求位于 s 右半平面的特征根的个数，并求出特征根。

解　首先列劳斯表

s^6	1	-4	-7	10	
s^5	4	4	-8		
s^4	(-5)	(-5)	(10)		该行各项除以 5
	-1	-1	2		由该行构建辅助方程 $F(s)=-s^4-s^2+2=0$
s^3	0	0			求导得 $-4s^3-2s=0$
	-4	-2			
s^2	$(-\frac{1}{2})$	(2)			该行各项乘以 2
	-1	4			
s^1	-18				
s^0	4				

劳斯表中第一列元素变号两次，所以有两个位于 s 右半平面的特征根。

解辅助方程 $-s^4-s^2+2=0$，得两对对称于原点的根

$$s_{1,2}=\pm \mathrm{j}\sqrt{2},\quad s_{3,4}=\pm 1$$

利用辅助方程和多项式除法，特征方程变为

$$(s^4+s^2-2)(s^2+4s-5)=0$$

所以另外两个根由方程 $s^2+4s-5=0$ 求得

$$s_5=+1,\quad s_6=-5$$

证明确实有两个位于 s 右半平面的特征根。

例 **3.11**　已知系统特征方程为

$$s^5+2s^4-s-2=0$$

试应用劳斯判据分析系统的稳定性。如不稳定，求出系统在 s 右半平面的特征根数。

解　特征方程式中 s 的各次幂的系数不全为正，则不满足系统稳定的必要条件，所以系统不稳定。列劳斯表计算 s 右半平面的特征根数：

s^5	1	0	-1	
s^4	2	0	-2	利用此行构造辅助方程 $F(s)=2s^4-2=0$
s^3	0	0		求导得 $8s^3=0$
	8	0		
s^2	0	-2		改第一列元素0为任意小的正数 δ,继续计算劳斯表
	δ	-2		
s^1	$\frac{16}{\delta}$	0		
s^0	-2			

劳斯表第一列元素变号一次,说明系统有一个正根。

解辅助方程 $s^4-1=0$,得

$$s_{1,2}=\pm 1,\quad s_{3,4}=\pm \mathrm{j}$$

利用辅助方程和多项式除法,特征方程变为

$$(s+2)(s^4-1)=0$$

所以特征方程的另一个根为 $s_5=-2$。

【点评】 劳斯判据是根据系统特征多项式系数判定系统稳定性的重要工具。

(1) 劳斯表中某行各元素同乘以或同除以一个正数,不影响最终由劳斯表得出的结论。

(2) 列劳斯表时可能出现两种特殊情况。

情况一:劳斯表中出现全零行。

处理方法:用全零行上面一行元素构造辅助方程,辅助方程对 s 求导一次得一个新方程,用新方程的系数代替全零行系数,继续计算劳斯表。

劳斯表出现全零行表明系统存在对称原点的特征根,可能是一对符号相反的实根;或一对共轭虚根;或两对实部符号相异、虚部相同的复根。解辅助方程可以解出这些特征根。

情况二:劳斯表中某行第一列元素为零,而同行其他元素不为零或无其他项元素。

处理方法:用一无穷小的正数 δ 代替零,继续计算劳斯表。

例 **3.12** 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(2s+1)(s+1)}{s^2(Ts+1)},\ K>0,\ T>0$$

确定当闭环系统稳定时,T,K 应满足的条件。

解 系统的闭环特征方程为

$$D(s)=Ts^3+(1+2K)s^2+3Ks+K$$

因为 $$T>0,\ K>0$$

所以 s 的各次幂的系数均大于零,满足稳定的必要条件。

列劳斯表

s^3	T	$3K$

s^2	$1+2K$	K
s^1	$\frac{(1+2K)\times 3K-KT}{1+2K}$	
s^0	K	

为使闭环系统稳定，要求劳斯表第一列各元素均大于0，即要求

$$\begin{cases} T>0 \\ 1+2K>0 \\ (1+2K)\times 3K-KT>0 \\ K>0 \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} T>0 \\ K>-\frac{1}{2} \\ 3(1+2K)>T \\ K>0 \end{cases}$$

所以只要 $3(1+2K)>T$，闭环系统就可稳定。

例 **3.13**　单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+25)}$$

求(1) 使系统稳定的 K^* 值；

(2) K^* 多大时，系统将振荡？并求振荡频率(用劳斯判据确定)。

解　(1) 系统特征多项式

$$D(s)=(s+2)(s+4)(s^2+6s+25)+K^*=$$
$$s^4+12s^3+69s^2+198s+200+K^*$$

若要系统稳定，首先要求 $K^*>0$。

列劳斯表

s^4	1	69	$200+K^*$
s^3	12	198	
s^2	105	$400+2K^*$	该行各行均乘2
s^1	$198-\frac{12}{105}(400+2K^*)$		
s^0	$400+2K^*$		

若要系统稳定，只要 $198-\frac{12}{105}(400+2K^*)>0$，解之得 $K^*<666.25$，所以使系统稳定的 K^* 范围是

$$0<K^*<666.25$$

(2) 由(1)中的劳斯表可得当 $K^*=666.25$ 时，s^1 行第一个元素为0，此时系统处于临界稳定状态。

由 s^2 行可得辅助方程

$$F(s)=105s^2+400+2\times 666.25=105s^2+1732.5=0$$

解之得
$$s=\pm j4.06$$

所以系统在 $K^*=666.25$ 时振荡，振荡频率为 4.06 rad/s。

例 **3.14** 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K_a}{s(s^2+20\xi s+100)}$$

(1) 试确定使系统稳定的参数(开环增益 K，阻尼比 ξ)的范围；

(2) 取 $\xi=2$，确定保证系统闭环极点全部位于 s 平面中 $s=-1$ 之左的开环增益。

解　系统的开环增益

$$K=\frac{K_a}{100}$$

闭环特征方程为

$$D(s)=s^3+20\xi s^2+100s+K_a=0$$

列劳斯表

s^3	1	100
s^2	20ξ	K_a
s^1	$\dfrac{20\xi\times100-K_a}{20\xi}$	
s^0	K_a	

(1) 要使系统稳定，劳斯表中第一列各元素均大于零，即有

$$\begin{cases}20\xi>0\\20\xi\times100-K_a>0,\\K_a>0\end{cases}\quad 即\begin{cases}\xi>0\\0<K_a<2\,000\xi\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}\xi>0\\0<K<20\xi\end{cases}$$

可以绘制 K，ξ 的稳定范围，如图 3.9 阴影部分所示。

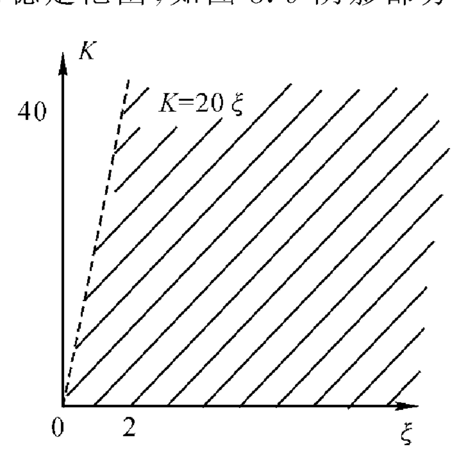


图 3.9　参数稳定范围

(2) 当 $\xi=2$ 时，

$$D(s)=s^3+40s^2+100s+K_a$$

令 $s=s_1-1$,代入特征方程式,得

$$D(s_1)=(s_1-1)^3+40(s_1-1)^2+100(s_1-1)+K_a=$$
$$s_1^3+37s_1^2+23s_1+(K_a-61)$$

列劳斯表

$$\begin{array}{lll} s_1^3 & 1 & 23 \\ s_1^2 & 37 & K_a-61 \\ s_1^1 & \dfrac{23\times 37-(K_a-61)}{37} & \\ s_1^0 & K_a-61 & \end{array}$$

则要求
$$\begin{cases} 23\times 37-(K_a-61)>0 \\ K_a-61>0 \end{cases}$$

所以
$$61<K_a<912$$

则
$$0.61<K<9.12$$

【点评】 (1)注意开环增益的概念,不能将题中 K_a 当做开环增益,要分析清开环增益 K 与系统参数 K_a 的关系。

开环传递函数写成“尾 1 型”,即形如 $\dfrac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^v(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_{n-v}s+1)}$ 时的 K 为开环增益;开环传递函数写成“首 1 型”,即形如 $\dfrac{K^*(s+Z_1)(s+Z_2)\cdots(s+Z_m)}{s^v(s+P_1)(s+P_2)\cdots(s+P_{n-v})}$ 时的 K^* 为根轨迹增益。

(2) 为使系统具有良好的动态响应,保证轻微干扰下系统仍然稳定,我们常希望特征根距虚轴有一定的距离,希望特征根全在 $s=-\alpha$ 的左边,α 称为给定的稳定度。这时仅需令 $s=s_1-\alpha$ 代入特征方程 $D(s)=0$,得 $D(s_1)=0$,然后对 $D(s_1)=0$ 列劳斯表计算参数的取值范围。

(3) 工程中仍有一类问题,已知系统的闭环特征方程,要判断有多少特征根的实部落在开区间$(-\alpha_1,-\alpha_2)$内$(\alpha_1>\alpha_2)$。

对于此类问题仅需先用劳斯判据判断有几个根在 $s=-\alpha_1$ 之右,再用劳斯判据判断有几个根在 $s=-\alpha_2$ 之右,便可综合出结果。

例 **3.15** 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)(2s+1)},\ (K>0,\ T>0)$$

(1) 为使闭环系统稳定,K 和 T 应满足什么关系?在 $K-T$ 直角坐标中画出使系统稳定的区域。

(2) 若闭环系统处于临界稳定,持续振荡频率 $\omega=1$ rad/s,求 T 和 K 的值。

解　系统的特征方程为

$$D(s)=s(Ts+1)(2s+1)+K=2Ts^3+(2+T)s^2+s+K=0$$

列劳斯表

s^3	$2T$	1
s^2	$2+T$	K
s^1	$\dfrac{2+T-2KT}{2+T}$	
s^0	K	

(1) 要使系统稳定，除了已知条件 $T>0,K>0$ 外，还应满足

$$2+T-2KT>0$$

即

$$K<\frac{1}{T}+\frac{1}{2}$$

绘制 $K=\dfrac{1}{T}+\dfrac{1}{2}$ 曲线，如图 3.10 所示。

使系统稳定的参数 K,T 的取值范围见图 3.10 阴影部分。

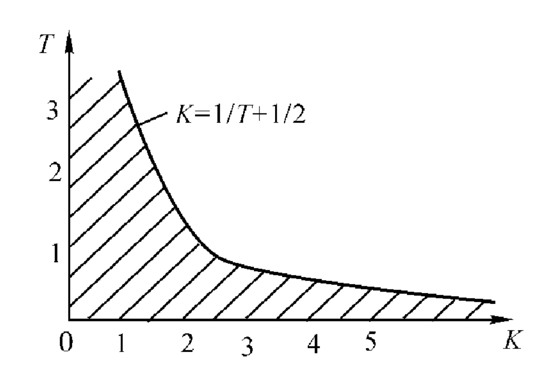


图 3.10　系统稳定的参数取值范围

(2) 有两种解法。

解法 **1**　利用劳斯表求解：

系统处于临界稳定，以频率 $\omega=1$ rad/s 振动，说明系统此时有一对虚根 $s=\pm\mathrm{j}$，那么劳斯表中 s^1 行全为零，即

$$2+T-2KT=0 \tag{1}$$

而纯虚根可由 s^2 行构造的辅助方程求得。即 $s=\pm\mathrm{j}$ 是辅助方程 $(2+T)s^2+K=0$的根。将 $s=\mathrm{j}$ 代入辅助方程，得

$$-(2+T)+K=0 \tag{2}$$

联立方程式(1)和(2)，得

$$K=\frac{5}{2},\quad T=\frac{1}{2}$$

解法 2　利用复变函数知识求解：

虚根 $s=\pm j$ 是系统的特征根，代入特征方程应满足特征方程，即

$$-j2T-(2+T)+j+K=0$$

上式左右两边的实部虚部应相等，有

$$\begin{cases}K-(2+T)=0\\1-2T=0\end{cases}$$

所以

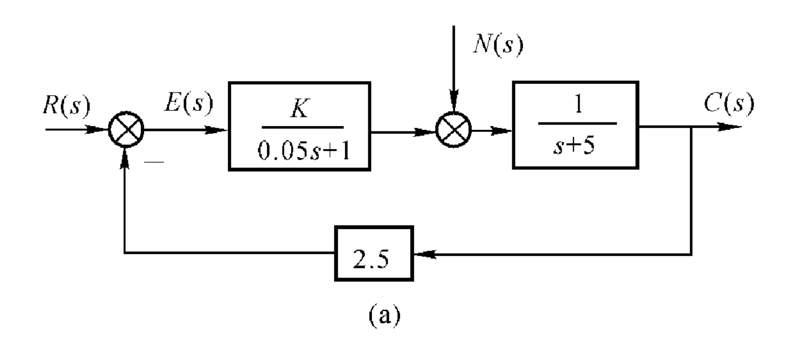
$$\begin{cases}K=\dfrac{5}{2}\\T=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

例 **3.16**　控制系统如图 3.11(a)所示，误差 $E(s)$ 在输入端定义，扰动输入 $n(t)=2\times1(t)$。

(1) 试求 $K=40$ 时，系统在扰动作用下的稳态输出和稳态误差。

(2) 若 $K=20$，其结果如何？

(3) 在扰动作用点之前的前向通道中引入积分环节 $\dfrac{1}{s}$，对结果有何影响？在扰动作用点之后的前向通道中引入积分环节 $\dfrac{1}{s}$，结果又将如何？



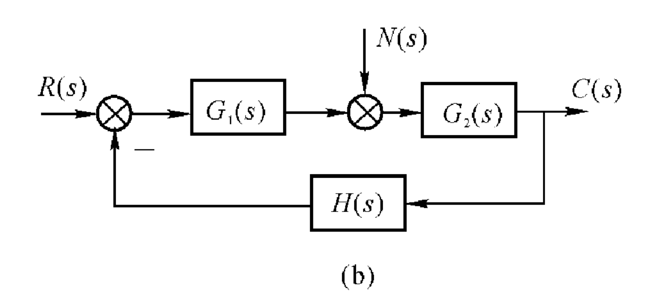


图 3.11

(a) 控制系统结构图；(b) 一般系统结构图

解　对于受扰动和控制输入同时作用的闭环系统见图 3.11(b)，输出信号

$$C(s)=\Phi(s)R(s)+\Phi_N(s)N(s)=$$

$$\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)+\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

令 $R(s)=0$，得扰动作用下的输出

$$C_N(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

误差

$$E_N(s)=R(s)-H(s)C_N(s)=-\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

若 $E_N(s)$ 和 $C_N(s)$ 在 s 右半平面和虚轴上解析，则有扰动作用下的稳态误差

$$e_{ssN}=\lim_{s\to 0}sE_N(s)=-\lim_{s\to 0}s\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

扰动作用下的稳态输出为

$$c_N(\infty)=\lim_{s\to 0}sc_N(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

对于图 3.11(a)所示系统

$$G_1(s)=\frac{K}{0.05s+1},\ G_2(s)=\frac{1}{s+5},\ H=2.5$$

则

$$c_N(\infty)=\frac{2}{1+2.5K}$$

$$e_{ssN}=-\frac{5}{1+2.5K}$$

(1) 当 $K=40$ 时，$c_N(\infty)=\frac{2}{101}$，$e_{ssN}=-\frac{5}{101}$。

(2) 当 $K=20$ 时，$c_N(\infty)=\frac{2}{51}$，$e_{ssN}=-\frac{5}{51}$。

(3) 若 $\frac{1}{s}$ 加在扰动作用点之前，则

$$G_1(s)=\frac{K}{s(0.05s+1)},\quad G_2(s)=\frac{1}{s+5}$$

$$H(s)=2.5$$

此时

$$c_N(\infty)=0,e_{ssN}=0$$

若 $\frac{1}{s}$ 加在扰动作用点之后，有

$$G_1(s)=\frac{K}{0.05s+1},\ G_2(s)=\frac{1}{s(s+5)},\ H(s)=2.5$$

所以
$$c_N(\infty)=\frac{2}{2.5K}=\begin{cases}\dfrac{2}{100},\ K=40\text{ 时}\\[2mm]\dfrac{2}{50},\ K=20\text{ 时}\end{cases}$$

$$e_{ssN}=-\frac{5}{2.5K}=\begin{cases}-\dfrac{5}{100},\ K=40\text{ 时}\\[2mm]-\dfrac{5}{50},\ K=20\text{ 时}\end{cases}$$

【点评】（1）本题目的解题关键是利用终值定理求信号的稳态值。注意终值定理的应用条件：$E(s)$的全部极点均分布在 s 平面的左半平面。

（2）本题目的计算结果说明了一个事实：增大扰动作用点之前的前向通道传递函数的增益会使扰动作用下系统的稳态误差的绝对值减小；在扰动作用点之前的前向通道中加入积分环节，可消除阶跃扰动产生的稳态误差。

例 **3.17**　控制系统结构图如图 3.12 所示，其中扰动信号 $n(t)=1(t)$。试问：能否选择一个合适的 K_1 值，使系统在扰动作用下的稳态误差值为 $e_{ssN}=-0.099$？

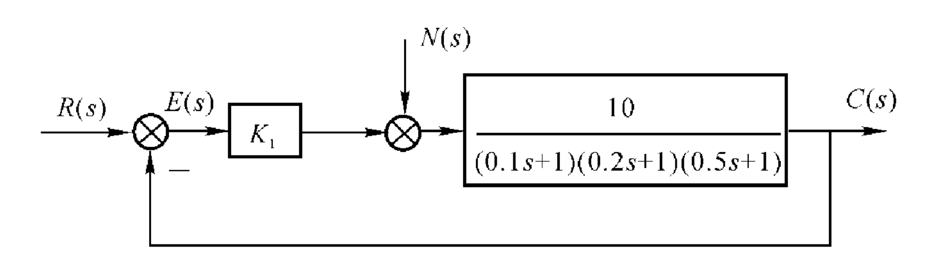


图 3.12　控制系统结构图

解　本系统的特征方程式为

$$D(s)=(0.1s+1)(0.2s+1)(0.5s+1)+10K_1=0$$

即
$$D(s)=0.01s^3+0.17s^2+0.8s+1+10K_1=$$
$$s^3+17s^2+80s+100+1\,000K_1=0$$

列劳斯表

s^3	1	80
s^2	17	$100+1\,000K_1$
s^1	$80-\dfrac{100+1\,000K_1}{17}$	
s^0	$100+1\,000K_1$	

若要系统稳定，需有

$$\begin{cases} 80-\dfrac{100+1\ 000K_1}{17}>0 \\ 100+1\ 000K_1>0 \\ K1>0 \end{cases}$$

解之，得

$$0<K_1<1.26$$

$$\Phi_{eN}(s)=-\frac{10}{(0.1s+1)(0.2s+1)(0.5s+1)+10K_1}$$

$$e_{ssN}=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s}\Phi_{eN}(s)=$$

$$-\lim_{s\to 0}\frac{10}{(0.1s+1)(0.2s+1)(0.5s+1)+10K_1}=-\frac{10}{1+10K_1}$$

当 $e_{ssN}=-0.099$ 时，有

$$\frac{10}{1+10K_1}=0.099$$

解之，得

$$K_1=10.2>1.26$$

所以当 $K_1=10.2$ 时，系统不稳定。

故而不能找到使得 $e_{ssN}=-0.099$ 的 K_1。

例 **3.18** 控制系统如图 3.13 示。已知 $r(t)=1(t)$，$n(t)=0.1\times 1(t)$，求稳态误差[$e(t)=r(t)-c(t)$]。

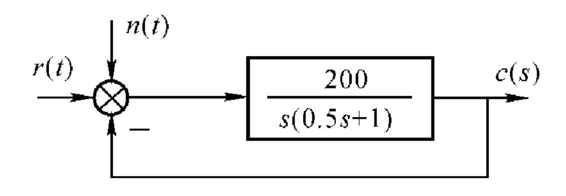


图 3.13 控制系统结构图

解 系统是二阶单位反馈系统，且各部件系数为正，说明该系统一定是稳定的。控制输入 $r(t)$ 作用下的稳态误差 e_{ssr} 可用终值定理求取，亦可用静态误差系数法求解。现用静态误差系数法求解。系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{200}{s(0.5s+1)}$$

可知系统是Ⅰ型系统，所以 $r(t)=1(t)$ 作用下的 $e_{ssr}=0$。

扰动 $n(t)$ 作用时，由误差的定义

$$e(t)=r(t)-c(t)=-c(t)$$

$$E_N(s)=-C(s)=-\Phi_N(s)N(s)=-\frac{200}{s(0.5s+1)+200}\cdot\frac{0.1}{s}$$

$$e_{ssN}=\lim_{s\to 0}sE_N(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{-200}{s(0.5s+1)+200}\cdot\frac{0.1}{s}=-0.1$$

所以，$r(t)$，$n(t)$同时作用下系统的总稳态误差

$$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssN}=-0.1$$

【点评】 系统稳定是计算稳态误差的前提，所以计算稳态误差首先应判定系统的稳定性。

例 **3.19** 系统结构图如图 3.14 所示。已知输入 $r(t)=1+t$，$n(t)=0.1\sin 100t$，试求系统在 $r(t)$，$n(t)$同时作用下的稳态误差[$e(t)=r(t)-c(t)$]。

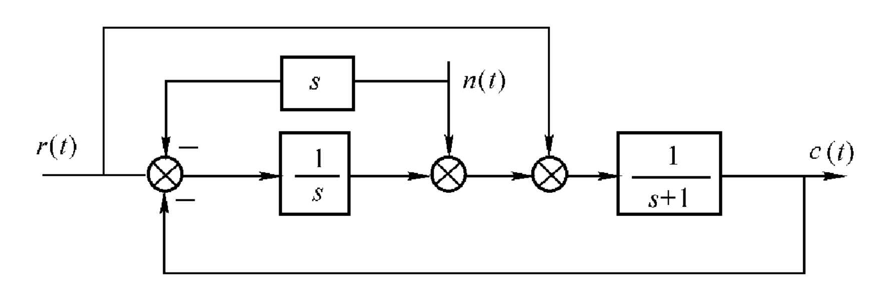


图 3.14　控制系统结构图

解　对线性系统来讲，系统在 $r(t)$，$n(t)$同时作用下的稳态误差 e_{ss} 等于 $r(t)$，$n(t)$分别作用时的稳态误差的叠加。即 $e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssN}$。

为求 $r(t)$单独作用的稳态误差 e_{ssr}，需令 $n(t)=0$。计算 e_{ssr}有两种方法。

解法 **1**　利用终值定理求解。

由梅逊公式，可求得系统的闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

而系统误差定义为

$$E(s)=R(s)-C(s)$$

所以

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=1-\frac{C(s)}{R(s)}=1-\Phi(s)=\frac{s^2}{s^2+s+1}$$

$$E(s)=\Phi_e(s)R(s)$$

利用终值定理可求出 $r(t)$作用下的稳态误差

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\Phi_e(s)R(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{s^2}{s^2+s+1}\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)=0$$

解法 2 利用静态误差系数法——需先做等效变换。

利用静态误差系数法求系统稳态误差是有条件的，其条件之一是该方法适用于控制输入 $r(t)$ 作用下的稳态误差计算，且 $r(t)$ 不存在前馈通道。对于本例而言，$r(t)$ 存在前馈通道，这种情况下，应先将系统做等效变换。因误差定义为 $e(t)=r(t)-c(t)$，所以系统可以等效变换为单位反馈系统。因为系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

等效单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)}=\frac{s+1}{s^2}$$

可见系统是Ⅱ型系统。因为 $r(t)=1+t$，所以系统在这种输入作用下的稳态误差 $e_{ssr}=0$。

为求 $n(t)$ 单独作用下的稳态误差，需令 $r(t)=0$。

利用梅逊公式可以求得从扰动到输出的传递函数

$$\Phi_N(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{s}{s(s+1)}}{1+\dfrac{1}{s(s+1)}}=0$$

可见扰动对输出无影响，即扰动作用时 $c(t)=0$。

扰动作用时的误差

$$e(t)=r(t)-c(t)=-c(t)=0$$

所以

$$e_{ssN}=0。$$

所以系统的总误差 $e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssN}=0$

【点评】 例 3.18 和例 3.19 说明了系统在同时受到控制输入和干扰输入作用时稳态误差的计算方法。解这类题目要明确误差的定义方式。如果习惯用静态误差系数法求解，则要注意静态误差系数法的使用条件。对例 3.18 而言，虽然 $r(t)$ 与 $n(t)$ 作用在同一点，$r(t)$ 产生的稳态误差可以使用静态误差系数法计算，而求 $n(t)$ 作用产生的稳态误差就不能用这种方法。

对例 3.19 应注意控制系统是复合控制。输入 $r(t)$ 有引出点，不宜采用静态误差系数法求解。如想用静态误差系数法做，则需先将控制输入作用下的系统等效变换为单位负反馈系统。

例 **3.20** 设控制系统如图 3.15 所示。求使系统对 $r(t)$ 为Ⅰ型系统的 K_2 值。(误差定义为 $e(t)=r(t)-c(t)$)

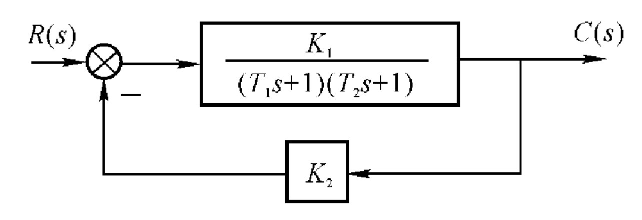


图 3.15　控制系统

解　系统的闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{K_1}{(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}$$

将系统等效变换为单位反馈系统，等效的单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)}=\frac{K_1}{s(T_1T_2s+T_1+T_2)+(1+K_1K_2-K_1)}$$

令 $1+K_1K_2-K_1=0$，系统对 $r(t)$ 为Ⅰ型系统，故 K_2 应取

$$K_2=1-\frac{1}{K_1}$$

例 **3.21**　复合控制系统如图 3.16 所示，图中 $G_r(s)=as^2+bs$，$G(s)=\frac{10}{s(0.1s+1)(0.02s+1)}$。选择 a,b，使系统由Ⅰ型系统提高为等效Ⅲ型系统。

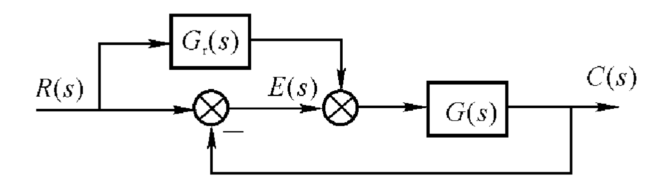


图 3.16　控制系统

解　　系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{[G_r(s)+1]G(s)}{1+G(s)}=\frac{10(as^2+bs+1)}{s(0.1s+1)(0.02s+1)+10}$$

系统等效开环传递函数

$$G(s)=\frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)}=\frac{10(as^2+bs+1)}{s(0.1s+1)(0.02s+1)+10-10(as^2+bs+1)}=$$

$$\frac{10(as^2+bs+1)}{0.002s^3+(0.12-10a)s^2+(1-10b)s}$$

若要系统提高为Ⅲ型系统，需有

$$\begin{cases}0.12-10a=0\\1-10b=0\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}a=0.012\\b=0.1\end{cases}$$

所以当 $a=0.012$，$b=0.1$ 时，可将系统由Ⅰ型系统提高到等效Ⅲ型系统。

例 **3.22** 控制系统结构图如图 3.17 示。图中 K_1、K_2 为正常数，β 为非负常数。试分析：

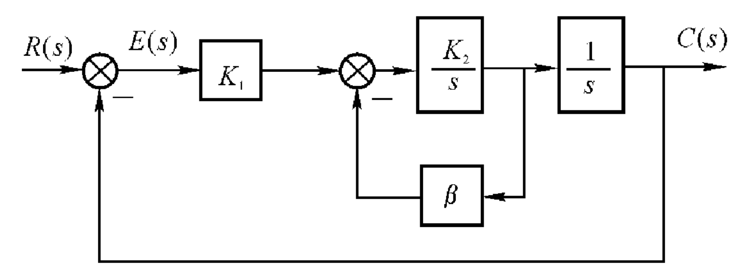


图 3.17 控制系统结构图

(1) β 值对系统稳定性的影响；

(2) β 值对系统动态性能的影响；

(3) β 值对系统斜坡响应稳态误差的影响。

解 系统闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{K_1K_2}{s^2}}{1+\dfrac{K_2\beta}{s}+\dfrac{K_1K_2}{s^2}}=\frac{K_1K_2}{s^2+K_2\beta s+K_1K_2}$$

(1) 系统特征方程为

$$D(s)=s^2+K_2\beta s+K_1K_2=0$$

故当 $\beta>0$ 时，系统稳定，当 $\beta=0$ 时，系统临界稳定。

(2) 对比二阶系统传递函数的标准形式，有

$$\begin{cases}\omega_n^2=K_1K_2\\2\xi\omega_n=K_2\beta\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\omega_n=\sqrt{K_1K_2}\\\xi=\dfrac{\sqrt{K_2}}{2\sqrt{K_1}}\beta\end{cases}$$

当 β 增大时，阻尼系数 ξ 增大，自然频率 ω_n 不变，超调量 $\sigma\%$ 减小，调节时

间 t_s 减小。

(3) 系统开环传递函数

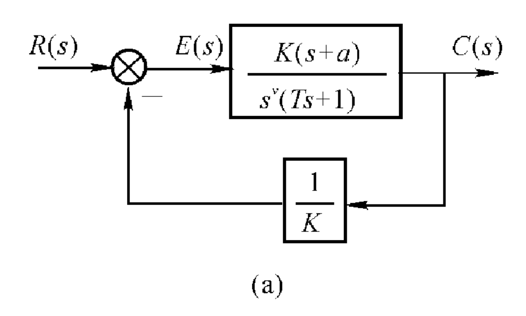
$$G(s)=K_1\frac{K_2}{s+K_2\beta}\frac{1}{s}=\frac{K_1K_2}{s(s+K_2\beta)}$$

故
$$K=\frac{K_1}{\beta},\quad v=1$$

当 $r(t)=t$ 时，$e_{ss}=\frac{1}{K}=\frac{\beta}{K_1}$。

所以稳态误差会随 β 增大而增大。

例 **3.23**　控制系统及其单位阶跃响应 $c(t)$ 如图 3.18所示，系统的稳态位置误差 $e_{ss}=0$，试确定 K，v 和 T 值。



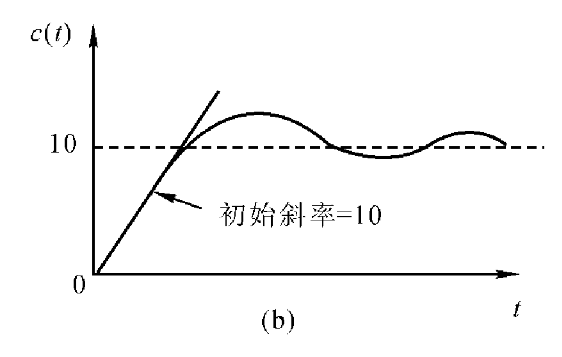


图 3.18　控制系统及其单位阶跃响应

解　依题意，系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(s+a)}{s^v(Ts+1)}\frac{1}{K}=\frac{s+a}{s^v(Ts+1)}$$

系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{K(s+a)}{s^v(Ts+1)}}{1+\dfrac{s+a}{s^v(Ts+1)}}=\frac{K(s+a)}{s^v(Ts+1)+s+a}$$

因为当 $r(t)=1(t)$时，$e_{ss}=0$，故 $v\geqslant$ Ⅰ。

由图 3.18(b)可见，系统响应是收敛的，说明系统稳定，则特征式

$$D(s)=Ts^{v+1}+s^v+s+a$$

中不应缺项,应有 $v \leqslant \text{Ⅱ}$。

响应终值为

$$c(\infty)=\lim_{s\to 0}s\Phi(s)\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{K(s+a)}{s^v(Ts+1)+s+a}$$

初始斜率为

$$c'(0)=\lim_{s\to\infty}s\Phi(s)1=\lim_{s\to\infty}\frac{sK(s+a)}{s^v(Ts+1)+s+a}$$

当 $T\neq 0$ 时,如果 $v=2$,则初始斜率 $c'(0)=0$,与图示不符,所以 $v\neq 2$,v 只能取 1。

当 $v=1$ 时,则

$$c(\infty)=K\overset{\text{令}}{=\!=}10$$

$$c'(0)=\lim_{s\to\infty}\frac{K+\dfrac{a}{s}}{T+\dfrac{2}{s}+\dfrac{a}{s^2}}=\frac{K}{T}\overset{\text{令}}{=\!=}10$$

因此有

$$v=1,\ K=10,\ T=1$$

当 $T=0$ 时,则

$$v=2,\ c(x)=K=10$$

【点评】 此例在求 $c'(t)$ 时利用了线性定常系统的响应特性:系统对输入信号响应的导数,等于系统对输入信号导数的响应。

例 **3.24** 设控制系统如图 3.19(e)所示,其主反馈和局部反馈极性均不确知,图中“0”表示断路。如果测得该系统的阶跃响应曲线有图 3.19(a)~3.19(d)4 种情况,试分别判断各种情况下系统的反馈极性,并简要说明理由。

解 (1) 图 3.19(a)对应主反馈为“－”,局部反馈为“0”。

因为阶跃响应是等幅振荡,说明系统 $\xi=0$,闭环特征根有一对纯虚根。在上述反馈极性判断下,闭环特征方程为

$$s^2+K_1K_2=0$$

系统有一对纯虚根。

(2) 图 3.19(b)对应主反馈为“－”,局部反馈为“＋”。此时,闭环特征方程为

$$s^2-K_2s+K_1K_2=0$$

说明系统 $\xi<0$,存在正实部根,因而阶跃响应发散。

(3) 图 3.19(c)对应主反馈为“0”,局部反馈为“－”。此时,闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{K_1K_2}{s(s+K_2)}$$

因为
$$R(s)=\frac{1}{s}$$

所以

$$C(s)=\frac{K_1K_2}{s^2(s+K_2)}=\frac{K_1}{s^2}-\frac{K_1}{K_2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+K_2}\right)$$

输出响应

$$c(t)=K_1t-\frac{K_1}{K_2}(1-e^{-K_2t})$$

对应图 3.19(c)的响应结果。

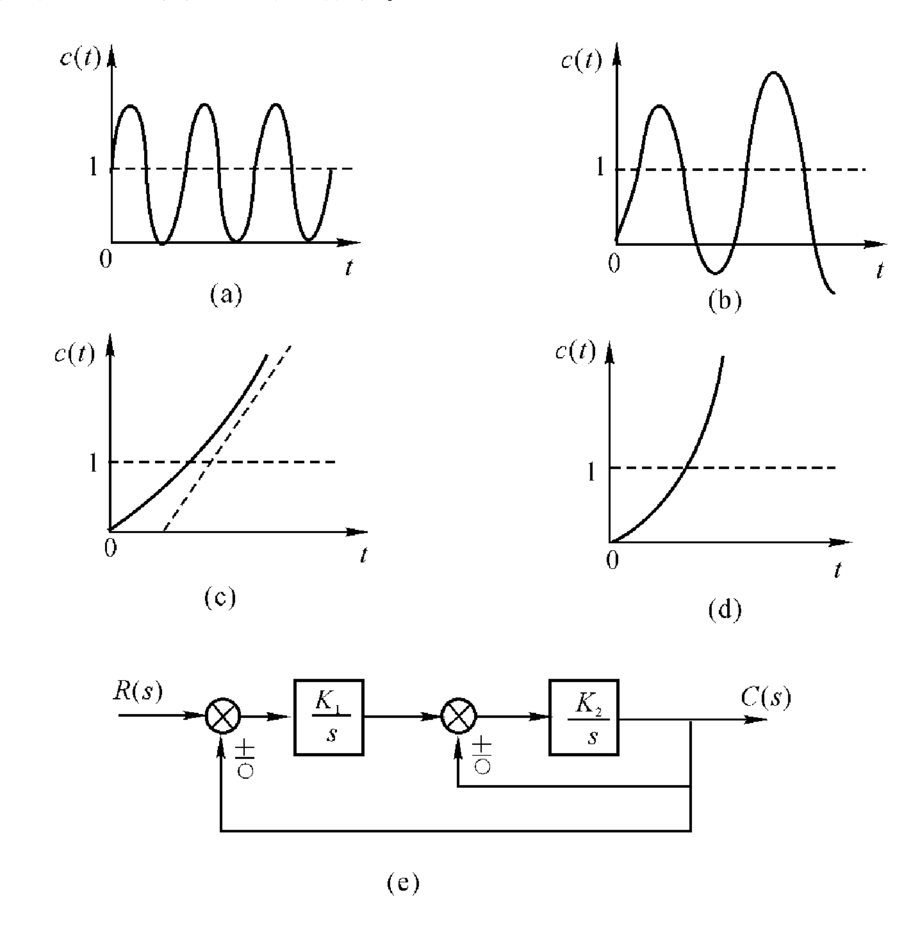
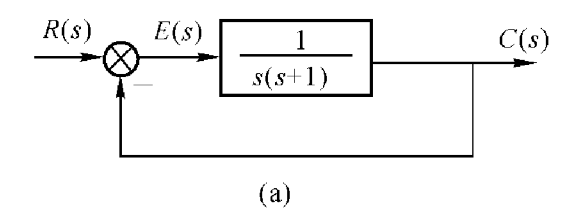


图 3.19　控制系统及其响应

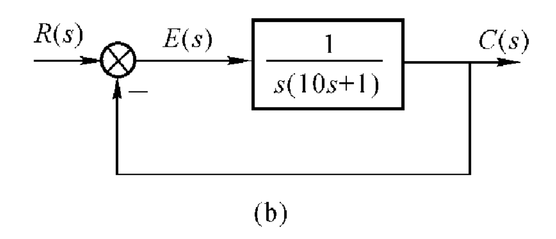
(4) 图 3.19(d)对应主反馈及局部反馈极性均为“0”。此时,阶跃信号通过两级积分器,产生等加速度信号。

例 **3.25**　两系统结构图分别如图 3.20(a),(b)所示。已知 $r(t)=2t+\frac{1}{4}t^2$,若要求 4 min 内系统的稳态误差不超过 6,应选用哪个系统?

解　本题目需求有限时间 $t=4$ min 的稳态误差,因而不能使用终值定理



(a)



(b)

图 3.20 控制系统结构图

和由终值定理推导出的静态误差系数法求解，而应先求出系统稳态误差随时间变化的规律，这样必须采用动态误差系数法。

因为
$$r(t)=2t+\frac{1}{4}t^2$$
故
$$\dot{r}(t)=2+\frac{1}{2}t$$
$$\ddot{r}(t)=\frac{1}{2}$$
$$r^{(3)}(t)=0$$

对于图 3.20(a)所示系统，误差传递函数为
$$\Phi_{ea}(s)=\frac{E_a(s)}{R(s)}=\frac{s(s+1)}{s^2+s+1}=C_0+C_1s+C_2s^2+\cdots$$
用比较系数法将 $\Phi_{ea}(s)$ 展开为关于 s 的升幂级数，有
$$s^2+s=(C_0+C_1s+C_2s^2+\cdots)(s^2+s+1)=$$
$$C_0+(C_0+C_1)s+(C_0+C_1+C_2)s^2+\cdots$$
比较系数有
$$C_0=0$$
$$C_1=1-C_0=1$$
$$C_2=1-C_0-C_1=0$$
$$\cdots$$
故
$$E_a(s)=(C_0+C_1s+C_2s^2+\cdots)R(s)=C_0R(s)+C_1sR(s)+C_2s^2R(s)+\cdots$$

$$e_{ssa}(t)=C_0r(t)+C_1\dot{r}(t)+C_2\ddot{r}(t)+\cdots=$$

$$0+(2+\frac{1}{2}t)+0+0+\cdots=2+\frac{1}{2}t$$

当 $t=4$ min 时，　$e_{ssa}(4)=2+\frac{1}{2}\times 4=4<6$。

对于结构图 3.20(b)所示系统，误差传递函数为

$$\Phi_{eb}(s)=\frac{E_b(s)}{R(s)}=\frac{s(10s+1)}{10s^2+s+1}=\frac{10s^2+s}{10s^2+s+1}$$

用长除法将 $\Phi_{eb}(s)$ 展开成关于 s 的升幂级数，有

$$\begin{array}{r|l}
 & s+9s^2-19s^3-71s^4+\cdots \\
1+s+10s^2 & s+10s^2 \\
 & \underline{s+s^2+10s^3} \\
 & 9s^2-10s^3 \\
 & \underline{9s^2+9s^3+90s^4} \\
 & -19s^3-90s^4 \\
 & \underline{-19s^3-19s^4-190s^5} \\
 & -71s^4+190s^5 \\
 & \vdots
\end{array}$$

所以

$$\Phi_{eb}(s)=\frac{E_b(s)}{R(s)}=s+9s^2-19s^3-71s^4+\cdots$$

$$E_b(s)=sR(s)+9s^2R(s)-19s^3R(s)-71s^4R(s)+\cdots$$

故

$$e_{ssb}(t)=\dot{r}(t)+9\ddot{r}(t)-19r^{(3)}(t)-71r^{(4)}(t)+\cdots=$$

$$(2+\frac{1}{2}t)+9\times\frac{1}{2}+0+\cdots=6.5+\frac{1}{2}t$$

当 $t=4$min 时，$e_{ssb}(4)=6.5+\frac{1}{2}\times 4=8.5>6$。

故应选用 3.20(a)所示的系统。

【点评】 (1) 用终值定理或静态误差系数法计算的稳态误差是误差的终值，不能反映稳态误差随时间变化的规律；而动态误差系数法可求出稳态误差的时间函数，如本题，要求有限时刻的稳态误差必须用动态误差系数法求解。如用静态误差系数法求解图 3.20(a)，(b)两系统的稳态误差均为∞，而此∞稳态误差是 $t\to\infty$ 时的误差值。

(2) 动态误差系数法的解题关键在于将系统的误差传递函数 $\Phi_e(s)$展开为 s 的升幂级数，得到各动态误差系数。一般做法是用比较系数法和长除法。用长除法展开时应先将 $\Phi_e(s)$的分子分母多项式均按升幂排列，然后进行长除。

(3) 使用动态误差系数法有如下条件：

1) 系统稳定，保证在 $s=0$ 处 $\Phi_e(s)$可以展开为泰勒级数。

2) $r(t)$只有有限阶导数项，或其高阶导数项可以忽略，这样才能将$e_{ss}(t)$写成有限项形式。

例 3.26 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{100}{s(0.1s+1)}$$

若输入信号为$r(t)=\sin 5t$，试求系统的稳态误差。

解

解法 1 动态误差系数法

$$\Phi_e(s)=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{s(0.1s+1)}{s(0.1s+1)+100}=\frac{s+0.1s^2}{100+s+0.1s^2}=$$
$$0+10^{-2}s+9\times10^{-4}s^2-1.9\times10^{-5}s^3+\cdots$$

故动态误差系数为

$$C_0=0,\ C_1=10^{-2},\ C_2=9\times10^{-4},\ C_3=-1.9\times10^{-5}$$

可求得稳态误差

$$e_{ss}(t)=C_0r(t)+C_1\dot{r}(t)+C_2\ddot{r}(t)+C_3r^{(3)}(t)+\cdots=$$
$$(C_0-C_2\omega_0^2+C_4\omega_0^4+\cdots)\sin\omega_0t+(C_1\omega_0-C_3\omega_0^3+C_5\omega_0^5+\cdots)\cos\omega_0t$$

式中$\omega_0=5$，对上述级数求和，得

$$e_{ss}(t)=-(0.023\sin 5t-0.049\,8\cos 5t)=-0.054\,9\cos(5t-24.89^\circ)$$

解法 2 拉氏反变换法

误差信号

$$E(s)=\Phi_e(s)R(s)=\frac{s^2+10s}{s^2+10s+1\,000}\cdot\frac{5}{s^2+25}=$$
$$\frac{as+b}{s^2+10s+1\,000}+\frac{cs+d}{s^2+25}$$

其中a,b,c,d待定。上式通分后比较系数，得

$$\begin{cases}25b+1\,000d=0\\a+c=0\\b+10c+d=5\\25a+1\,000c+10d=50\end{cases}$$

故
$$c=-0.049\,8,d=-0.115$$

显然闭环系统是稳定的(因特征多项式$D(s)=0.1s^2+s+100$)，故稳态误差的拉氏变换为

$$E_{ss}(s)=\frac{cs+d}{s^2+25}=-\frac{0.049\,8s+0.115}{s^2+25}$$

由拉氏反变换得稳态误差，同解法1。

【点评】 可以采用对误差信号的拉氏变换 $E(s)$ 求反变换的方法求解稳态误差。此时可先将 $E(s)$ 部分分式展开。若分析清楚系统是稳定的，则可直接舍去造成误差瞬态分量的部分分式，得到误差稳态分量的拉氏变换 $E_{ss}(s)$，则 $e_{ss}(t)=\mathscr{L}^{-1}[E_{ss}(s)]$。

例 **3.27**　复合控制系统如图3.21示。其中 $K_1=2K_2=1$，$T_2=0.25\text{s}$，$K_2K_3=1$。求

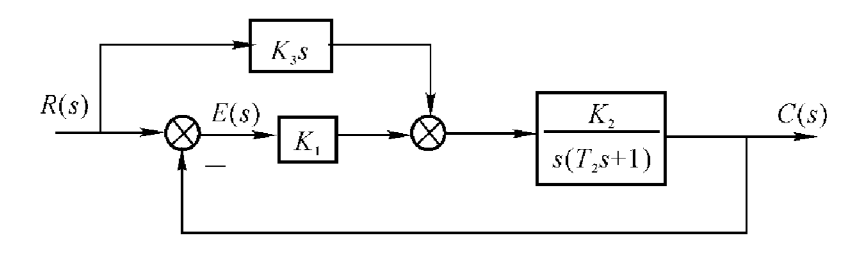


图3.21　控制系统结构图

(1) 当 $r(t)=1+t+\frac{1}{2}t^2$ 时，系统的稳态误差；

(2) 系统的阶跃响应表达式。

解　系统的闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{(K_3s+K_1)\dfrac{K_2}{s(T_2s+1)}}{1+\dfrac{K_1K_2}{s(T_2s+1)}}=\frac{K_2K_3s+K_1K_2}{T_2s^2+s+K_1K_2}=\frac{4s+2}{s^2+4s+2}$$

等效单位反馈系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)}=\frac{2(2s+1)}{s^2}$$

所以

$$v=2,\ K=2$$

$$K_a=K=2$$

当 $r(t)=1+t+\frac{1}{2}t^2$ 时，稳态误差

$$e_{ss}=\frac{1}{K_a}=0.5$$

因为 $\Phi(s)=\frac{4(s+0.5)}{s^2+4s+2}$，表明系统为有零点的二阶系统。所以，当 $R(s)=\frac{1}{s}$ 时

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{4(s+0.5)}{s(s^2+4s+2)}=\frac{1}{s}+\frac{0.208}{s+0.586}-\frac{1.207}{s+3.414}$$

故单位阶跃响应

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[C(s)]=1+0.208\mathrm{e}^{-0.586t}-1.207\mathrm{e}^{-3.414t}$$

例 **3.28**　复合控制系统如图3.22示，已知 K_1，K_2，T_1，T_2 均是大于零的常数。

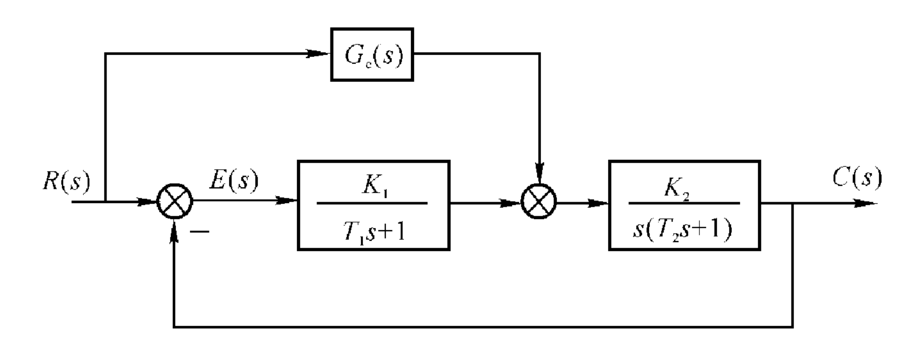


图 3.22　控制系统结构图

(1) 要使闭环系统稳定,参数 K_1,K_2,T_1,T_2 应满足什么条件;

(2) 当输入 $r(t)=V_0t$ 时,选择校正装置 $G_c(s)$,使系统无稳态误差(误差定义为 $e(t)=r(t)-c(t)$)。

解　(1) 系统误差传递函数

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1-\dfrac{K_2}{s(T_2s+1)}G_c(s)}{1+\dfrac{K_1K_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}}=$$

$$\frac{s(T_1s+1)(T_2+1)-K_2G_c(s)(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}$$

$$D(s)=T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+K_1K_2$$

列劳斯表

s^3	T_1T_2	1
s^2	T_1+T_2	K_1K_2
s^1	$\dfrac{T_1+T_2-T_1T_2K_1K_2}{T_1+T_2}$	
s^0	K_1K_2	

因为 K_1,K_2,T_1,T_2 均大于零,所以只要

$$T_1+T_2>T_1T_2K_1K_2$$

就可使闭环系统稳定。

(2) 解法 **1**

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\Phi_e(s)R(s)=$$

$$\lim_{s\to 0}s\frac{s(T_1s+1)(T_2s+1)-K_2G_c(s)(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}\frac{V_0}{s^2}=$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{V_0}{K_1K_2}\left[1-K_2\frac{G_c(s)}{s}\right]\overset{令}{=\!=}0$$

故　$$G_c(s)=\frac{s}{K_2}$$

解法 2　因误差定义为 $e(t)=r(t)-c(t)$，系统可以等效为单位负反馈系统。又因要求输入 $r(t)=V_0 t$ 时，系统无稳态误差，则等效的单位负反馈系统至少应是Ⅱ型系统。

由误差传递函数 $\Phi_e(s)$ 可以求得等效单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{1-\Phi_e(s)}{\Phi_e(s)}=\frac{K_1K_2+K_2G_c(s)(T_1s+1)}{(T_2s+1)[s(T_1s+1)-K_2G_c(s)]}=$$

$$\frac{K_1K_2+K_2G_c(s)(T_1s+1)}{(T_2s+1)[T_1s^2+s-K_2G_c(s)]}$$

要使等效单位反馈系统为Ⅱ型系统，应使

$$s-K_2G_c(s)=0$$

故可取

$$G_c(s)=\frac{s}{K_2}$$

例 **3.29**　复合控制系统如图 3.23 所示。

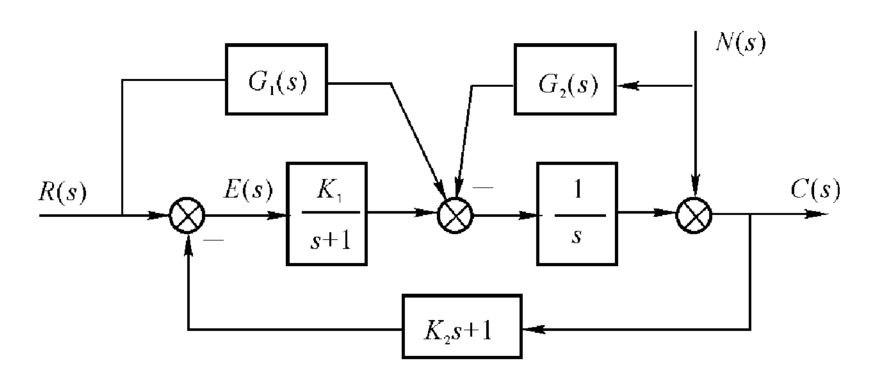


图 3.23　控制系统结构图

(1) 要使系统闭环极点配置在 $-5\pm j5$ 处，求相应的 K_1，K_2 值；

(2) 设计 $G_1(s)$，使系统在 $r(t)$ 单独作用下无稳态误差；

(3) 设计 $G_2(s)$，使系统在 $n(t)$ 单独作用下无稳态误差。

解　(1) 令 $N(s)=0$，得

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1-\dfrac{K_2s+1}{s}G_1(s)}{1+\dfrac{K_1(K_2s+1)}{s(s+1)}}=\frac{(s+1)[s-(K_2s+1)G_1(s)]}{s^2+(K_1K_2+1)s+K_1}$$

$$D(s)=s^2+(K_1K_2+1)s+K_1\overset{\text{令}}{=\!=}$$

$$(s+5-j5)(s+5+j5)=s^2+10s+50$$

比较系数，得

$$K_1=50$$

$$K_2=\frac{9}{50}$$

(2) 依题意，令 $\Phi_e(s)=0$，得

$$G_1(s)=\frac{s}{K_2s+1}$$

(3) 令 $R(s)=0$，得

$$\Phi_{eN}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=\frac{-(K_2s+1)+\frac{K_2s+1}{s}G_2(s)}{1+\frac{K_1(K_2s+1)}{s(s+1)}}=$$

$$\frac{(s+1)(K_2s+1)[-s+G_2(s)]}{s^2+(K_1K_2+1)s+K_1}$$

令 $\Phi_{eN}(s)=0$，得

$$G_2(s)=s$$

例 **3.30** 系统如图 3.24 所示，求：

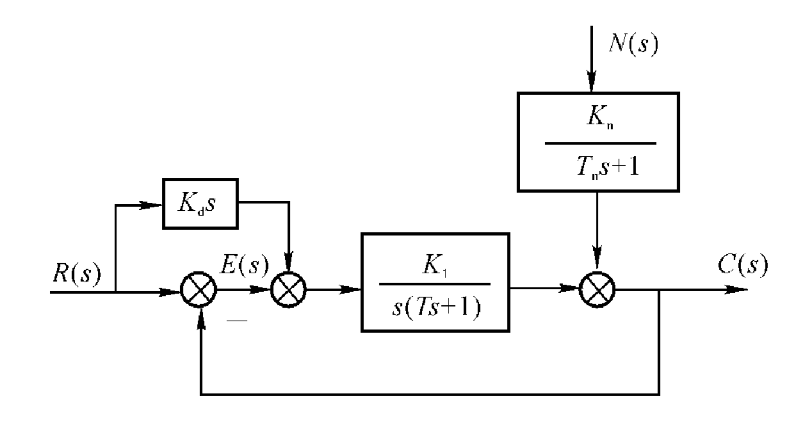


图 3.24 控制系统结构图

(1) $n(t)=1(t)$引起的稳态误差 e_{ssN}；

(2) 为使 $r(t)=n(t)=t$ 同时作用下的稳态误差为 0，确定 K_d 值。

解 (1) 干扰作用下的系统误差传递函数

$$\Phi_{eN}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=\frac{-\frac{K_n}{T_ns+1}}{1+\frac{K_1}{s(Ts+1)}}=\frac{-s(Ts+1)K_n}{s(Ts+1)(T_ns+1)+K_1(T_ns+1)}$$

当 $n(t)=1(t)$时，有

$$e_{ssN}=\lim_{s\to 0}sE_N(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{-s(Ts+1)K_n}{s(Ts+1)(T_ns+1)+K_1(T_ns+1)}\frac{1}{s}=0$$

(2) 系统的误差传递函数

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1-\frac{K_dsK_1}{s(Ts+1)}}{1+\frac{K_1}{s(Ts+1)}}=\frac{s(Ts+1)-K_1K_ds}{s(Ts+1)+K_1}$$

$r(t),n(t)$同时作用时

$$E(s)=\Phi_e(s)R(s)+\Phi_{eN}(s)N(s)$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=$$

$$\lim_{s\to 0}s\left(\frac{-s(Ts+1)K_n}{s(Ts+1)(T_ns+1)+K_1(T_ns+1)}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{s(Ts+1)-K_1K_ds}{s(Ts+1)+K_1}\cdot\frac{1}{s^2}\right)=$$

$$\frac{-K_n+1-K_1K_d}{K_1}\overset{令}{=\!=}0$$

故 K_d 应取 $K_d=\dfrac{1-K_n}{K_1}$。

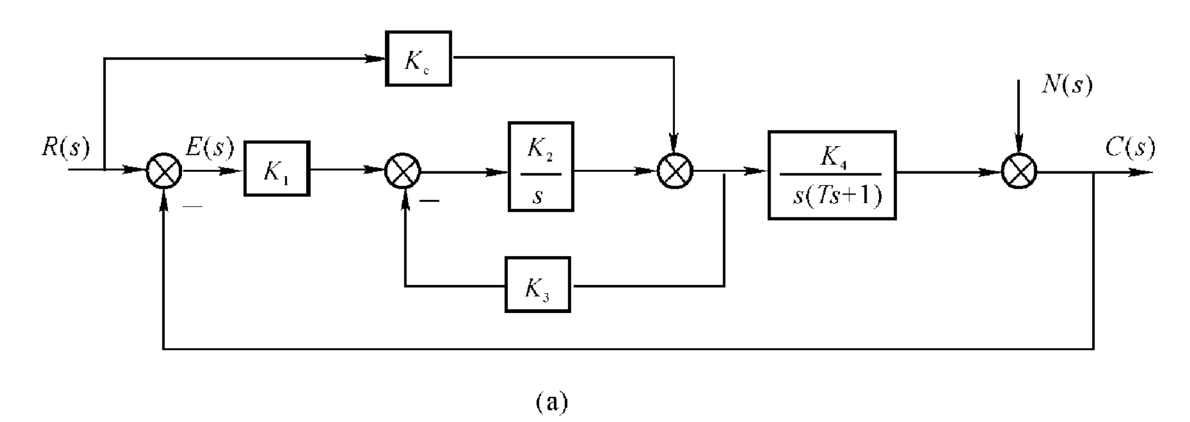
例 **3.31**　复合控制系统如图 3.25(a)所示。

(1) $n(t)=t$ 时,计算稳态误差 e_{ssN};

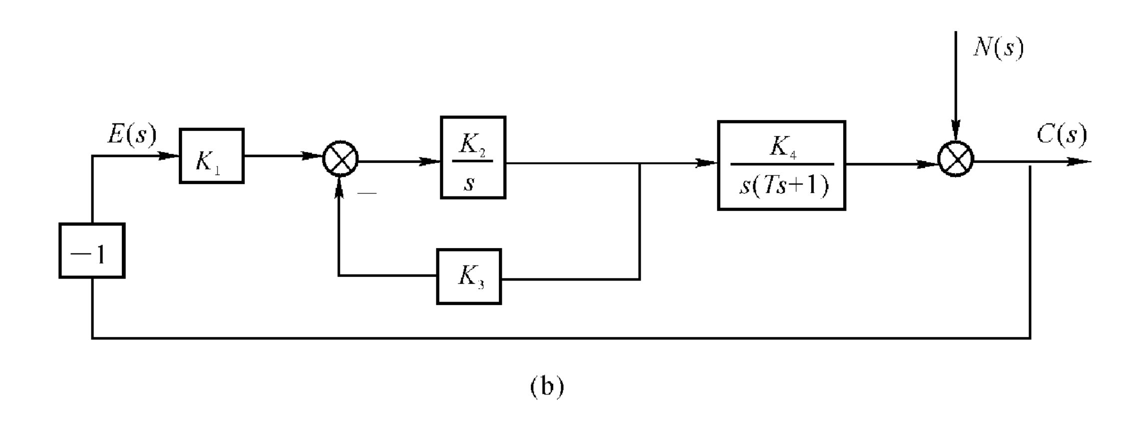
(2) 设计 K_c,使系统在 $r(t)=t$ 作用下无稳态误差。

解　(1) 令 $r(t)=0$,则结构图如图 3.25(b)所示

因为
$$\Phi_{eN}(s)=-\frac{1}{1+\dfrac{K_1K_2}{s+K_2K_3}\dfrac{K_4}{s(Ts+1)}}$$



(a)



(b)

图 3.25　例 3.31 图

(a) 复合控制系统;(b) $r(t)=0$ 的等效结构图

当 $n(t)=t$ 时,则

$$e_{ssN}=\lim_{s\to 0}sN(s)\Phi_{eN}(s)=-\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s^2}\frac{1}{1+\dfrac{K_1K_2}{s+K_2K_3}\dfrac{K_4}{s(Ts+1)}}=-\frac{K_3}{K_1K_4}$$

(2) 若要系统在 $r(t)=t$ 作用下无稳态误差，则系统至少要为Ⅱ型系统。

由梅逊公式可以求得系统闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{\left(K_c+\dfrac{K_1K_2}{s}\right)\dfrac{K_4}{s(Ts+1)}}{1+\dfrac{K_1K_2K_4}{s^2(Ts+1)}+\dfrac{K_2K_3}{s}}=\frac{(K_cs+K_1K_2)K_4}{s^2(Ts+1)+K_2K_3(Ts^2+s)+K_1K_2K_4}$$

所以系统等效单位反馈的开环传递函数

$$G(s)=\frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)}=\frac{(K_cs+K_1K_2)K_4}{Ts^3+(1+K_2K_3T)s^2+(K_2K_3-K_cK_4)}$$

若要系统成为Ⅱ型系统，应使 $K_2K_3-K_cK_4=0$，即 $K_c=\dfrac{K_2K_3}{K_4}$，此时系统在 $r(t)=t$ 作用下无稳态误差。

例 **3.32**　控制系统如图 3.26 所示，要求

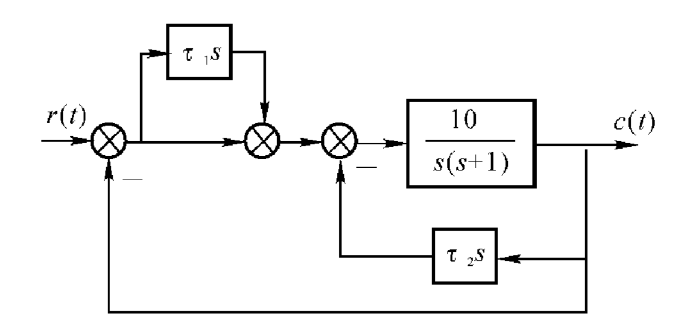


图 3.26　控制系统

(1) 计算测速反馈校正（$\tau_1=0,\tau_2=0.1$）时，系统的 $\sigma\%$，t_s，e_{ssv}（速度误差）；

(2) 计算比例-微分校正（$\tau_1=0.1,\tau_2=0$）时，系统的 $\sigma\%$，t_s，e_{ssv}。

解　(1) $\tau_1=0,\tau_2=0.1$ 时，系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+2)}$，与二阶系统开环传递函数标准形 $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$ 相比较，可得

$$\begin{cases}\xi=\sqrt{\dfrac{1}{10}}=0.316\\ \omega_n=\sqrt{10}\end{cases}$$

所以

$$\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times 100\%=e^{-\pi\times 0.316/\sqrt{1-(0.316)^2}}\times 100\%=35.1\%$$

$$t_s=\frac{3.5}{\xi\omega_n}=\frac{3.5}{0.316\times\sqrt{10}}=3.5\ \text{s}$$

系统特征多项式为 $D(s)=s^2+2s+10$，各项系数均大于零，故系统稳定。又此系统为Ⅰ型系统，速度误差系数 $K_v=\lim\limits_{s\to 0}sG(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\dfrac{10}{s(s+2)}=5$，所以 $e_{ssv}=\dfrac{1}{K_v}=0.2$。

(2) 当 $\tau_1=0.1,\tau_2=0$ 时，系统开环传递函数 $G(s)=\dfrac{s+10}{s(s+1)}$ 是一个有零点的二阶系统，不能按照无零点的二阶系统计算 $\sigma\%$ 与 t_s。

系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{s+10}{s^2+2s+10}$$

故而

$$C(s)=R(s)\Phi(s)=\frac{s+10}{s(s^2+2s+10)}$$

所以

$$c(t)=\mathscr{L}^{-1}[C(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+10}{s(s^2+2s+10)}\right]=$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right]=1-e^{-t}\cos 3t$$

对 $c(t)$ 求导，得

$$c'(t)=e^{-t}\sin(3t+0.321)$$

令 $c'(t)=0$，求得

$$t=(k\pi-0.321)/3,k=1,2,\cdots$$

故

$$t_p=\frac{\pi-0.321}{3}=0.939\ \text{s}$$

而

$$\max[c(t)]=c(0.939)=1-e^{-0.939}\cos(3\times 0.939)=1.371$$

所以

$$\sigma\%=37.1\%$$

再由

$$|c(t)-1|=|e^{-t}\cos 3t|\leqslant e^{-t}=0.05$$

近似求得

$$t_s=3.0\ \text{s}$$

系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{s+10}{s(s+1)}$$

速度误差系数为

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s+10}{s(s+1)}=10$$

所以

$$e_{ssv}=\frac{1}{K_v}=0.1$$

【点评】 本例意在表明二阶系统动态性能指标计算公式 $t_s=\dfrac{3.5}{\xi\omega_n}$，$\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times100\%$只适用于无闭环零点的二阶系统。同时本例还表明附加闭环零点不改变闭环系统的特征多项式，因而不会影响系统响应的模态，但可改变各模态在响应中所占的比重，从而影响系统的动态性能。附加闭环零点会使系统峰值时间提前，超调量增加。附加的闭环零点离虚轴越近，这种影响越强烈。

第四章

线性系统的根轨迹法

例 **4.1** 设控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试绘制 K^* 变化时系统的根轨迹。

解 (1) 系统有 4 个开环极点

$$P_1=0,\ P_2=-3,\ P_{3,4}=-1\pm \mathrm{j}$$

无开环零点,所以系统有 4 条根轨迹,起始于 4 个开环极点,终止于无穷远处。

(2) 实轴上的根轨迹[−3,0]。

(3) 渐近线与实轴的交点坐标

$$\sigma_a=\frac{-3-1-1}{4}=-1.25$$

与实轴的夹角

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{4},\ k=0,1,2,3$$

所以 $$\varphi_a=\pm\frac{\pi}{4},\ \pm\frac{3\pi}{4}$$

(4) 分离点:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+3}+\frac{1}{d+1+\mathrm{j}}+\frac{1}{d+1-\mathrm{j}}=0$$

整理得 $$4d^3+15d^2+16d+6=0$$

对于高次方程的求解,先采用试探法求出一个根

$$d_1=-2.3$$

再利用长除法分解出分离点 d 的二次方程,求出另两个根

$$d_{2,3}=0.725\pm \mathrm{j}0.365(\text{舍去})$$

(5) 与虚轴的交点,可用两种方法求取:

首先,系统的特征方程式为

$$D(s)=s(s+3)(s^2+2s+2)+K^*=s^4+5s^3+8s^2+6s+K^*=0$$

解法 1 将 $s=\mathrm{j}\omega$ 代入 $D(s)=0$,令实部和虚部分别为零,即可求出 ω。

$$D(\mathrm{j}\omega)=(\omega^4-8\omega^2+K^*)+\mathrm{j}(6\omega-5\omega^3)=0$$

故

$$\omega=\pm1.1,\ K^*=8.16$$

解法 2 利用劳斯稳定判据求根轨迹与虚轴的交点。

根据特征方程列劳斯表

s^4	1	8	K^*
s^3	5	6	
s^2	$\dfrac{34}{5}$	K^*	
s^1	$\dfrac{204/5-5K^*}{34/5}$		
s^0	K^*		

根轨迹与虚轴有交点劳斯表必出现全零行。针对本例,令劳斯表中 s^1 行的首项为零,求出 $K^*=8.16$。根据表中 s^2 行的元素写出辅助方程

$$\frac{34}{5}s^2+K^*=0$$

可求得与虚轴的交点为

$$s=\pm\mathrm{j}1.1$$

(6) 出射角:

$$\theta_{p3}=180^\circ-\angle(P_3-P_1)-\angle(P_3-P_2)-\angle(P_3-P_4)=$$
$$180^\circ-135^\circ-26.6^\circ-90^\circ=-71.6^\circ$$

由对称性得

$$\theta_{p4}=71.6^\circ$$

做出系统的根轨迹如图 4.1 所示。

【点评】 根轨迹的分离点与会合点亦可以采用重根法求解。

首先将闭环特征方程式中的 K^* 分离出来,写成下列形式

$$D(s)=A(s)+K^*B(s)=0 \tag{1}$$

式中 $A(s)$和 $B(s)$均为不含 K^* 的 s 多项式。如果方程 $D(s)=0$ 具有重根 s_1,则必然同时满足 $D(s_1)=0$ 和 $D'(s_1)=0$,因此特征方程的重根可由下列方程组求解

$$\begin{cases}A(s)+K^*B(s)=0\\A'(s)+K^*B'(s)=0\end{cases}$$

消去 K^*,得

$$A(s)B'(s)-A'(s)B(s)=0$$

又由(1)式,有

$$K^*=-\frac{A(s)}{B(s)}$$

对 s 求导得

$$\frac{\mathrm{d}K^*}{\mathrm{d}s}=-\frac{[A'(s)B(s)-A(s)B'(s)]}{B^2(s)}$$

故分离点与会合点亦可用$\frac{\mathrm{d}K^*}{\mathrm{d}s}=0$求得。

对于例 4.1,有

$$D(s)=s^4+5s^3+8s^2+6s+K^*=0$$

则
$$K^*=-[s^4+5s^3+8s^2+6s]$$

对 s 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}K^*}{\mathrm{d}s}=-[4s^3+15s^2+16s+6]=0$$

即
$$4s^3+15s^2+16s+6=0$$

解得　$s_1=-2.3$,　$s_{2,3}=0.725\pm \mathrm{j}0.365$(舍去)

同分离点方程求得的结果。

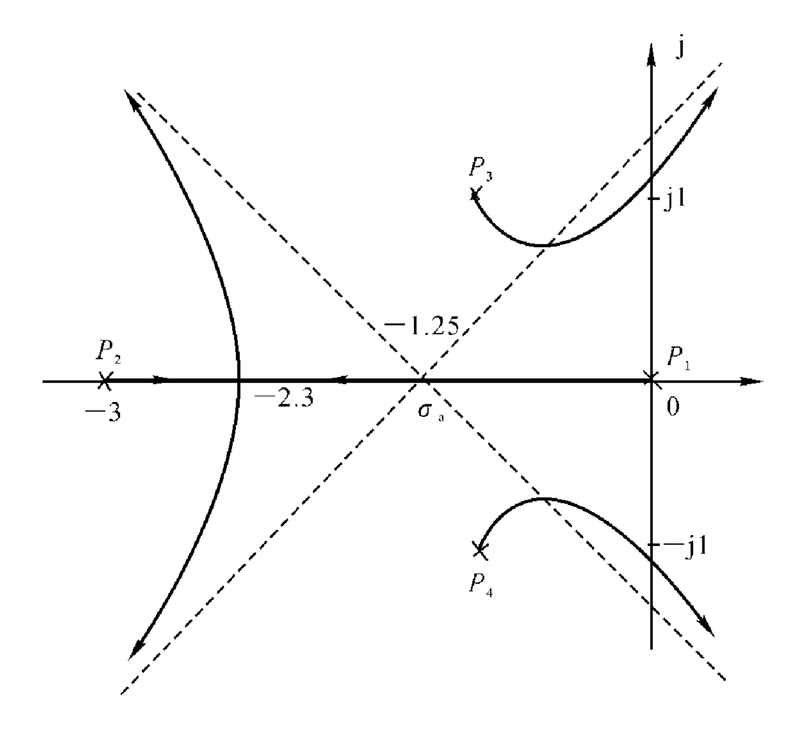


图 4.1　系统根轨迹

例 **4.2**　设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

试绘制系统的根轨迹。

解　(1) 4 条根轨迹起始于开环极点 $P_1=0,P_2=-4,P_{3,4}=-2\pm \mathrm{j}4$,终止于无限远点。

(2) 实轴上的根轨迹[−4,0]。

(3) 渐近线:与实轴的交点

$$\sigma_a=\frac{0-4-2-2}{4}=-2$$

与实轴的夹角

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4}$$

(4) 分离点：由闭环特征方程

$$s(s+4)(s^2+4s+20)+K^*=0$$

分离出 K^* 后，令

$$\frac{dK^*}{ds}=-(s^3+6s^2+18s+20)=0$$

根据根轨迹的对称性，可以判断一个分离点在 -2 处，于是上式可以分解为

$$(s+2)(s^2+4s+10)=0$$

求解上式得另外两个分离点为 $-2\pm j2.45$。

(5) 出射角：

$$\theta_{P_3}=180°-\angle(P_3-P_1)-\angle(P_3-P_2)-\angle P_3-P_4)=$$
$$180°-135°-45°-90°=-90°$$
$$\theta_{P_4}=90°$$

(6) 与虚轴的交点：令 $s=j\omega$，代入 $D(s)=0$，得

$$(\omega^4-36\omega^2+K^*)+j(80\omega-8\omega^3)=0$$

解得
$$\omega=\pm\sqrt{10},\ K^*=260$$

其根轨迹如图 4.2 所示。

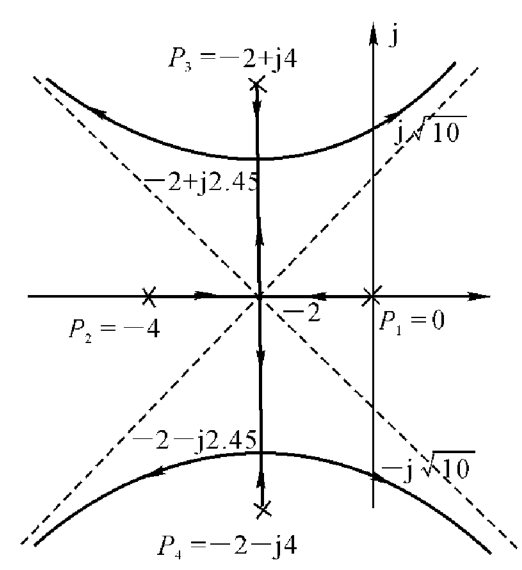


图 4.2 系统的根轨迹

例 **4.3** 设系统的开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s+2)(s+3)}{s(s+1)}$$

(1) 绘制 K^* 由 $0\to\infty$ 变化时系统的根轨迹；

(2) 试求系统呈现欠阻尼状态时的开环增益范围；

(3) 在根轨迹图上标出系统最小阻尼比时的闭环极点。

解　因 $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s+2)(s+3)}{s(s+1)}$，故开环增益 $K=6K^*$。

(1) 绘制根轨迹。

1) 两条根轨迹起始于开环极点 $P_1=0$，$P_2=-1$，终止于开环零点 $Z_1=-2$，$Z_2=-3$。

2) 实轴上的根轨迹 $[-3,-2]$，$[-1,0]$

3) 分离点：
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}=\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+3}$$

整理，得

$$2d^2+6d+3=0$$

解之，得

$$d_1=-0.634,\ d_2=-2.366$$

对应的 K^* 值分别是

$$K^*_{d_1}=\frac{|d_1||d_1+1|}{|d_1+2||d_1+3|}=0.071\ 8$$

$$K^*_{d_2}=\frac{|d_2||d_2+1|}{|d_2+2||d_2+3|}=13.928$$

则
$$K_{d_1}=6K^*_{d_1}=0.4308,\ K_{d_2}=6K^*_{d_2}=83.568$$

绘制的根轨迹如图 4.3 所示。

(2) 由根轨迹可以确定使系统呈现欠阻尼状态的 K 值范围为 $0.430\ 8<K<83.568$。

(3) 复平面根轨迹是圆，圆心位于 $\dfrac{d_1+d_2}{2}=-1.5$ 处，半径是 $\dfrac{d_1-d_2}{2}=0.866$。对应最小阻尼比的闭环极点位于切点 A 上，如图 4.3 所示。由相似三角形关系

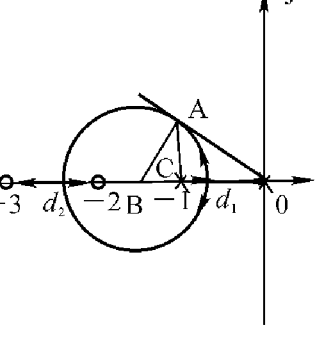


图 4.3　系统的根轨迹

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BO}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

则
$$\overline{BC}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BO}}=\frac{0.866^2}{1.5}=0.5$$
$$\overline{OC}=\overline{BO}-\overline{BC}=1.5-0.5=1$$
$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{0.866^2-0.5^2}=0.707$$

故对应最小阻尼比的闭环极点为
$$s_{1,2}=-1\pm j0.707$$

例 **4.4** 已知单位反馈系统的开环传递函数为
$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

试用根轨迹法分析系统的稳定性，若主导极点具有阻尼比 $\xi=0.5$，求系统的性能指标。

解 开环传递函数为
$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$
式中：$K^*=2K$。

1. 绘系统根轨迹图

(1) 3 条根轨迹起始于 3 个开环极点 $P_1=0, P_2=-1, P_3=-2$，终止于无穷远处。

(2) 实轴上的根轨迹$(-\infty,-2],[-1,0]$。

(3) 渐近线：与实轴的交点
$$\sigma_a=\frac{0-1-2}{3}=-1$$

与实轴的夹角
$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\frac{\pi}{3},\pi,-\frac{\pi}{3}$$

(4) 分离点：
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+2}=0$$
整理得
$$3d^2+6d+2=0$$
解得
$$d_1=-0.423,\ d_2=-1.577(\text{不在根轨迹上，舍去})$$

(5) 与虚轴的交点：

令 $s=j\omega$，代入 $D(s)=s^3+3s^2+2s+K^*=0$ 中，得
$$(K^*-3\omega^2)+j(2\omega-\omega^3)=0$$
解得
$$\omega=\pm\sqrt{2},\ K^*=6$$
故
$$K=\frac{K^*}{2}=3$$

2. 稳定性分析

根轨迹与虚轴交点的坐标是$\pm j\sqrt{2}$，对应临界稳定的开环增益为$K=3$，因而使系统稳定的开环增益范围为$0<K<3$。

3. 根据阻尼比的要求，确定闭环主导极点s_1，s_2的位置

在s平面过原点O画等阻尼线OA，OA与实轴负方向的夹角$\beta=\cos^{-1}\xi=\cos^{-1}0.5=60°$，阻尼线与根轨迹相交点的坐标为$s_1$，则从根轨迹图上可测得$s_1=-0.33+j0.58$和其共轭的极点$s_2=-0.33-j0.58$。可根据幅值条件求$s_1$对应$K^*=|s_1||s_1-P_2||s_1-P_3|=1.05$。设第3个极点为$s_3$，根据根之和法则，可知$s_1+s_2+s_3=P_1+P_2+P_3=0-1-2=-3$，则$s_3=-2.33$，可看出$s_3$距虚轴的距离远大于$s_1$，$s_2$距虚轴的距离，故$s_1$，$s_2$可看做闭环主导极点。

事实上，还可以利用解析法求s_1，s_2。

设
$$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n=-0.5\omega_n\pm j\sqrt{0.75}\omega_n$$

由根之和，得
$$\Sigma P_i=\Sigma s_i$$

所以
$$0-1-2=-3=s_3-2\times0.5\omega_n$$
$$s_3=\omega_n-3$$

应有
$$D(s)=s^3+3s^2+2s+K^*=(s-s_3)[(s+0.5\omega_n)^2+0.75\omega_n^2]=$$
$$s^3+(\omega_n-s_3)s^2+(\omega_n^2-s_3\omega_n)s+s_3\omega_n^2$$

比较系数得
$$\omega_n=\frac{2}{3},\ s_3=-\frac{7}{3},\ K*=\frac{28}{27}$$

因而
$$s_{1,2}=-0.33\pm j0.58$$

4. 根据闭环主导极点的概念分析系统

因为$s_{1,2}=-0.33\pm j0.58$是系统的主导极点，则系统可以近似当做二阶系统进行分析，其闭环传递函数
$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{0.436}{s^2+0.66s+0.436}$$

则
$$\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times100\%=16.3\%$$
$$t_s=\frac{3.5}{\xi\omega_n}=\frac{3.5}{0.5\times0.66}=10.6\ s$$

【点评】 (1) 已知闭环极点$s=s_1$，要求根轨迹增益K^*的方法主要有3种：

1) 用模值条件解

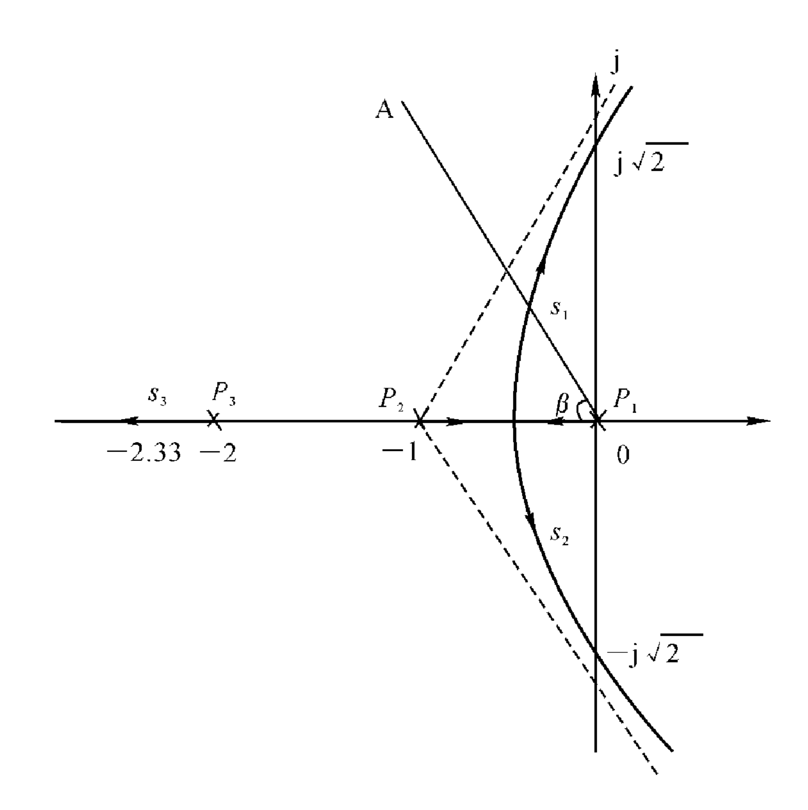


图 4.4 根轨迹

$$K^* = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s_1 - P_i|}{\prod_{j=1}^{m} |s_1 - Z_j|}$$

2) $s=s_1$ 应满足特征方程式，即利用 $D(s_1)=0$ 求出 K^*。

3) 利用特征多项式 $D(s)$能被 $s-s_1$ 除尽，亦可求 K^*。

(2) 已知一个闭环极点 $s=s_1$，要求其他的闭环极点，首先可利用上述方法求出该极点对应的 K^*，这样就知道了此时的特征方程 $D(s)=0$，利用长除法，将 $D(s)$分解为 $D(s)=(s-s_1)D_1(s)=0$，再由 $D_1(s)=0$ 求其他极点，如果条件不够用，还可加入根之和和根之积规则。

若系统特征方程为 $D(s)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n=0$，当 $n\geqslant m$ 时，

根之和：$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} P_i = -a_1$，根之积：$\prod_{i=1}^{n} s_i = (-1)^n a_n$

(3) 根轨迹与虚轴的交点是一个特殊点，该点对应的开环增益往往是使系统临界稳定的开环增益，根据此，可求系统稳定的开环增益范围。

(4) 分离点和会合点亦是根轨迹上的特殊点。分离点和会合点对应闭环特征方程有重根的情况。若分离点同时又是闭环主导极点，则该分离点也对应闭环降阶系统的临界阻尼运动状态。因而根据该点计算出的开环增益，往往可用以确定使系统呈现欠阻尼或过阻尼运动的开环增益范围。

例 4.5 已知控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(\tau s+1)(Ts+1)} \quad (T>0)$$

式中，参数 K，T 已知，参数 τ 特定。

试绘制以待定参数 τ 为可变参数时的根轨迹。

解　系统的特征方程式为

$$D(s)=1+G(s)H(s)=s(\tau s+1)(Ts+1)+K=0$$

即
$$\tau s^2(Ts+1)+s(Ts+1)+K=0$$

则等效开环传递函数为

$$G_{等}(s)=\frac{\tau s^2(Ts+1)}{Ts^2+s+K}$$

系统有两个开环极点

$$P_{1,2}=-\frac{1}{2T}\pm \mathrm{j}\sqrt{\frac{K}{T}-\left(\frac{1}{2T}\right)^2}$$

3 个开环零点

$$Z_1=Z_2=0,\ Z_3=-\frac{1}{T}$$

绘制该系统的根轨迹如图 4.5 所示。

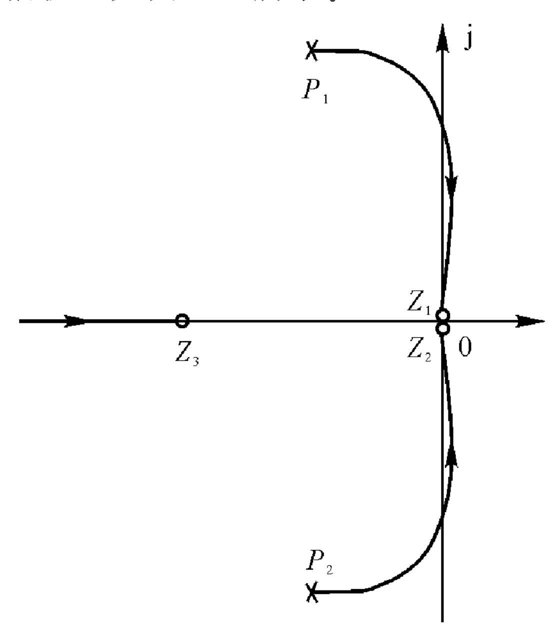


图 4.5　参数根轨迹

需要说明的是，由于等效开环传递函数中零点数（$m=3$）大于极点数（$n=2$），因而根轨迹中有一条分支始于无穷极点 $P_3=-\infty$ 处，沿负实轴终止于有限零点 $z_3=-\dfrac{1}{T}$处。由参数根轨迹与虚轴交点确定的待定参数 τ 值，便是待定参数 τ 的临界值 τ_c，计算可得

$$\tau_c=\frac{T}{KT-1}$$

当待定参数 $\tau>\tau_c$ 时，控制系统将不稳定。因而，使系统稳定的 τ 的取值范围是

$$0<\tau<\frac{T}{KT-1}$$

例 **4.6** 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*}{(s-1)(s^2+6s+10)}$$

(1) 绘制当 K 从 $0\to\infty$ 变化时系统的根轨迹，确定使系统闭环稳定的 K^* 取值范围。

(2) 求出系统在单位阶跃输入作用下稳态误差绝对值 $|e_{ss}|_{\min}$ 可能达到的最小值。

(3) 若已知系统闭环极点 $s_1=-1$，试确定系统的闭环传递函数。

解 开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*}{(s-1)(s+3+\mathrm{j})(s+3-\mathrm{j})}$$

(1) 绘制根轨迹：

1) 3 条根轨迹分别起始于 3 个开环极点 $P_1=1, P_{2,3}=-3\pm\mathrm{j}$，终止于无限零点。

2) 实轴上的根轨迹为 $(-\infty,1]$。

3) 渐近线：与实轴交点 $\sigma_a=\dfrac{1-3-3}{3}=-\dfrac{5}{3}$

与实轴夹角 $\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm\dfrac{\pi}{3},\pi$

4) 分离点：$\dfrac{1}{d-1}+\dfrac{1}{d+3+\mathrm{j}}+\dfrac{1}{d+3-\mathrm{j}}=0$

整理得

$$3d^2+10d+4=0$$

解得

$$d_1=-0.464\,8,\ d_2=-2.868\,5$$

相应的 K^* 值是

$$K^*_{d_1}=|d_1-1||d_1+3+\mathrm{j}||d_1+3-\mathrm{j}|=10.88$$

$$K^*_{d_2}=|d_2-1||d_2+3+\mathrm{j}||d_2+3-\mathrm{j}|=4.023$$

5) 与虚轴交点：

$$D(s)=(s-1)(s^2+6s+10)+K^*=s^3+5s^2+4s+K^*-10$$

令

$$\begin{cases}\mathrm{Im}[D(\mathrm{j}\omega)]=-\omega^3+4\omega=0\\ \mathrm{Re}[D(\mathrm{j}\omega)]=-5\omega^2+K^*-10=0\end{cases}$$

解出

$$\begin{cases}\omega_1=0\\ K_1^*=10\end{cases}\qquad\begin{cases}\omega_2=\pm2\\ K_2^*=30\end{cases}$$

画出根轨迹如图 4.6 所示。

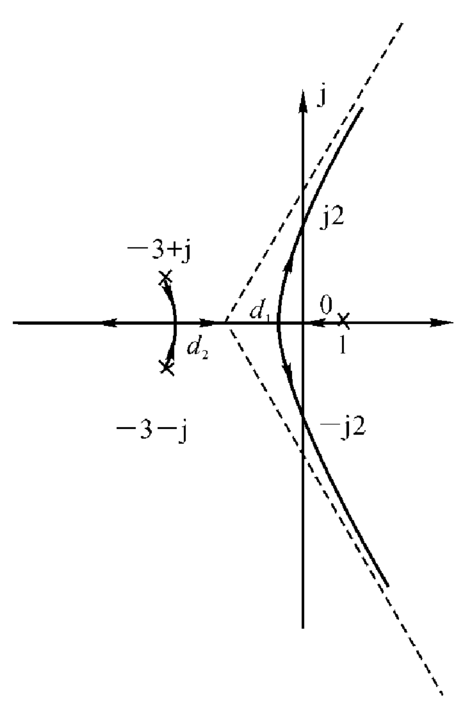


图 4.6　系统根轨迹

由根轨迹可以确定使系统稳定的 K^* 取值范围是

$$10<K^*<30$$

(2) 系统的静态位置误差系数为 $K_p=\lim\limits_{s\to 0}G(s)=-\frac{K^*}{10}$，由静态误差系数法，可求得系统在稳态范围内有

$$|e_{ss}|_{\min}=\frac{1}{1+K_{p\max}}=\left|\frac{1}{1-\left(\frac{K^*}{10}\right)_{\max}}\right|=\left|\frac{1}{1-\frac{30}{10}}\right|=\frac{1}{2}$$

(3) 依题意 $s_1=-1$ 一定满足特征方程 $D(s)=0$，即有

$$(-1)^3+5\times(-1)^2+4\times(-1)+K^*-10=0$$

故

$$K^*=10$$

因而系统的闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{K^*}{(s-1)(s^2+6s+10)+K^*}=$$

$$\frac{10}{s^3+5s^2+4s}=\frac{10}{s(s+1)(s+4)}$$

例 **4.7**　已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(1-0.5s)}{s(s+1)}$$

试绘制系统的根轨迹，并求使系统产生重根和纯虚根的 K 值。

解　系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(1-0.5s)}{s(s+1)}=\frac{K^*(2-s)}{s(s+1)}$$

式中，$K^*=\dfrac{K}{2}$。

因为此系统是非最小相位系统，且 s 的最高次项的系数为负，则应按零度根轨迹规则绘制系统根轨迹。

(1) 两条根轨迹分别起始于开环极点 $P_1=0, P_2=-1$，其中一条终止于有限零点 $Z_1=2$，另一条终止于无穷点。

(2) 实轴上$[-1,0][2,+\infty)$是根轨迹。

(3) 渐近线
$$\sigma_a=\frac{-1+0-2}{n-m}=-3$$

$$\varphi_a=\frac{2k\pi}{n-m}=2k\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$$

(4) 分离点 d
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}=\frac{1}{d-2}$$

解得
$$d_1=-0.45,\ d_2=+4.45$$

由于 $D(s)=s^2+(1-K^*)s+2K^*=0$，故对应的 $K_{d_1}^*=0.1, K_{d_2}^*=9.9$。

(5) 与虚轴的交点：

令
$$\mathrm{Im}[D(\mathrm{j}\omega)]=(1-K^*)\omega=0$$
$$\mathrm{Re}[D(\mathrm{j}\omega)]=-\omega^2+2K^*=0$$

解得
$$\omega=\pm\sqrt{2},\ K^*=1$$

做出 0°根轨迹如图 4.7 所示。

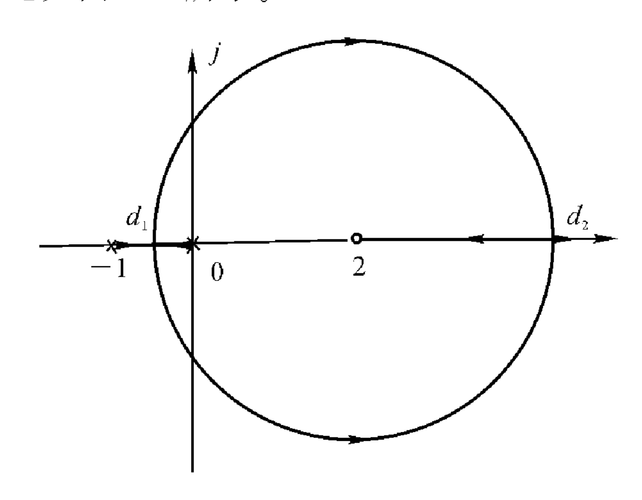


图 4.7 系统根轨迹

使系统产生重根的 $K_{d_1}=2K_{d_1}^*=0.2, K_{d_2}=2K_{d_2}^*=19.8$，使系统产生纯虚根的 $K=2K^*=2$。

例 **4.8** 设反馈控制系统

$$G(s)=\frac{K^*}{s^2(s+2)(s+5)},\ H(s)=1$$

要求：(1) 绘制系统根轨迹，判断系统的稳定性；

(2) 如果改变反馈通路传递函数使 $H(s)=1+2s$，试判断 $H(s)$ 改变后系统的稳定性，研究 $H(s)$ 改变所产生的效应。

解　(1) 4 条根轨迹分别起始于开环极点 $P_1=P_2=0, P_3=-2, P_4=-5$，终止于开环无限零点。

实轴上 $[-5,-2]$，$[0,0]$ 是根轨迹。

渐近线
$$\sigma_a=\frac{0+0-2-5}{4}=-1.75$$
$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4}$$

分离点
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d}+\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+5}=0$$

整理有
$$(4d+5)(d+4)=0$$

解得
$$d_1=-4,\ d_2=-\frac{5}{4}\ (\text{不在根轨迹上，舍去。})$$

根略绘制根轨迹如图 4.8(a)所示，由图知，无论 K^* 为何值，闭环系统恒不稳定。

(2) 当 $H(s)=1+2s$ 时，系统开环传递函数为
$$G(s)H(s)=\frac{2K^*(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+5)}=\frac{K_1^*(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+5)}$$

4 条根轨迹分别起始于开环极点 $P_1=P_2=0, P_3=-2, P_4=-5$，其中 1 条终止于有限零点 $Z_1=-0.5$，其余 3 条终止于无限零点。

实轴上 $(-\infty,-5]$，$[-2,-0.5]$，$[0,0]$ 是根轨迹。

渐近线：$\sigma_a=\dfrac{0+0-2-5-(-0.5)}{4-1}=-2.17$，

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{4-1}=\pm\frac{\pi}{3},\pi$$

与虚轴的交点：

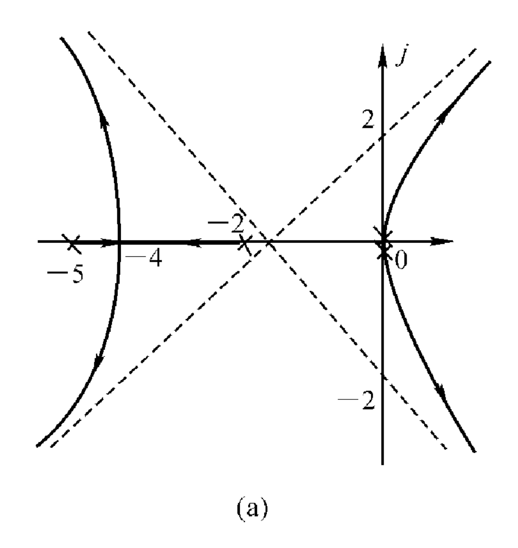
系统闭环特征方程为
$$D(s)=s^4+7s^3+10s^2+2K^*s+K^*=0$$

令
$$\mathrm{Im}[D(j\omega)]=-7\omega^3+2K^*\omega=0$$
$$\mathrm{Re}[D(j\omega)]=\omega^4-10\omega^2+K^*=0$$

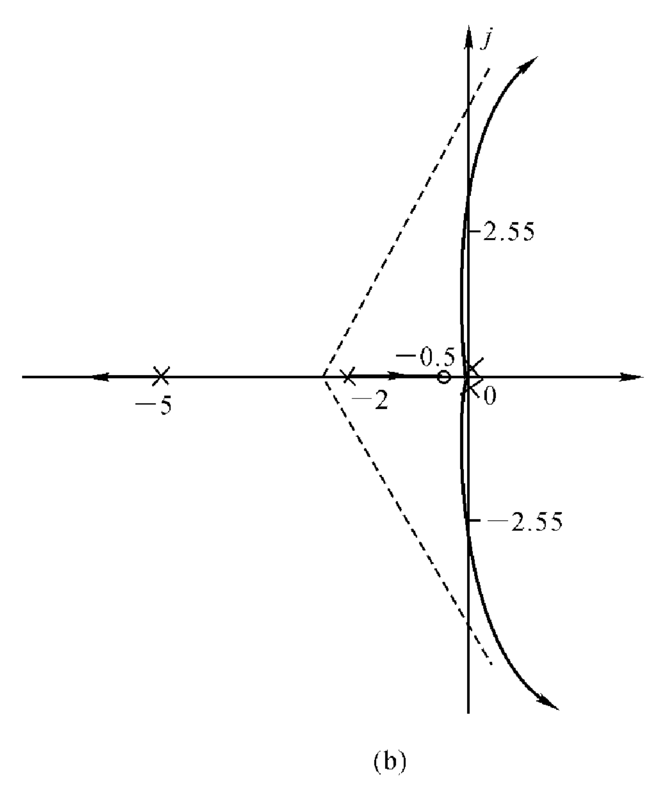
可求得
$$\omega=\pm2.55,\ K^*=22.75$$

概略绘制根轨迹如图 4.8(b)所示，由图知，当 $0<K^*<22.75$ 时，闭环系统稳定。

附加开环零点 $Z_1=-0.5$，使系统根轨迹向 s 平面左半平面弯曲。因而闭环系统在 K^* 一定范围内稳定，改善了系统的稳定性。



(a)



(b)

图 4.8 系统根轨迹

(a) $H(s)=1$;(b) $H(s)=1+2s$

例 **4.9** 控制系统如图 4.9 所示,其中 $G_c(s)$是为改善系统性能而加入的校正装置。试从下列传递函数中选择 $G_c(s)$并说明原因

(1) $G_c(s)=K_t s$

(2) $G_c(s)=K_a s^2$

(3) $G_c(s)=K_a s^2/(s+20)$

解 系统的开环传递函数

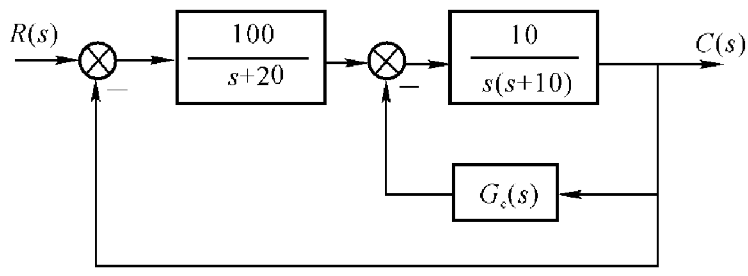


图 4.9　控制系统

$$G(s)=\frac{1\ 000}{(s+20)[s^2+10s+10G_c(s)]}$$

对应的等效开环传递函数为

$$G_{等}(s)=\frac{10G_c(s)(s+20)}{s^3+30s^2+200s+1\ 000}$$

(1) $G_c(s)=K_t s$ 时

$$G_{等}(s)=\frac{10K_t s(s+20)}{s^3+30s^2+200s+1\ 000}=$$

$$\frac{10K_t s(s+20)}{(s+23.25)(s+3.375+j5.625)(s+3.375-j5.625)}$$

绘制根轨迹如图 4.10(a)所示，改变 K_t，可使主导极点 $s_{1,2}$ 配置在最佳阻尼线上。

(2) $G_c(s)=K_a s^2$ 时

$$G_{等}(s)=\frac{10K_a s^2(s+20)}{s^3+30s^2+200s+1\ 000}$$

绘制根轨迹如图 4.10(b)所示，当 K_a 增大时，根轨迹越靠近虚轴，稳定性变差。

(3) $G_c(s)=K_a s^2/(s+20)$时

$$G_{等}(s)=\frac{10K_a s^2}{s^3+30s^2+200s+1\ 000}$$

根轨迹如图 4.10(c)所示。

讨论：(1) 因为系统的开环传递函数 $G(s)=\dfrac{1\ 000}{(s+20)[s^2+10s+10G_c(s)]}$，因此，不论选择哪一种 $G_c(s)$，系统都是Ⅰ型系统，故稳态误差相同。

(2) 当 $G_c(s)=K_t s$ 时，可通过改变 K_t 使系统主导极点处于最佳位置($\xi=0.707$)。而另两种情况，K_a 增大，系统的稳定性都差于 $G_c(s)=K_t s$ 的情况。且在 $K_a=0$ 时，主导复数极点与负实轴的夹角

$$\varphi=\arctan\frac{5.625}{3.375}\approx 73.47^\circ>45^\circ$$

当 K_a 增大时，φ 亦增大，所以不可能使主导复数极点处于最佳位置，因而

选第一种情况能较好地改善系统的性能。

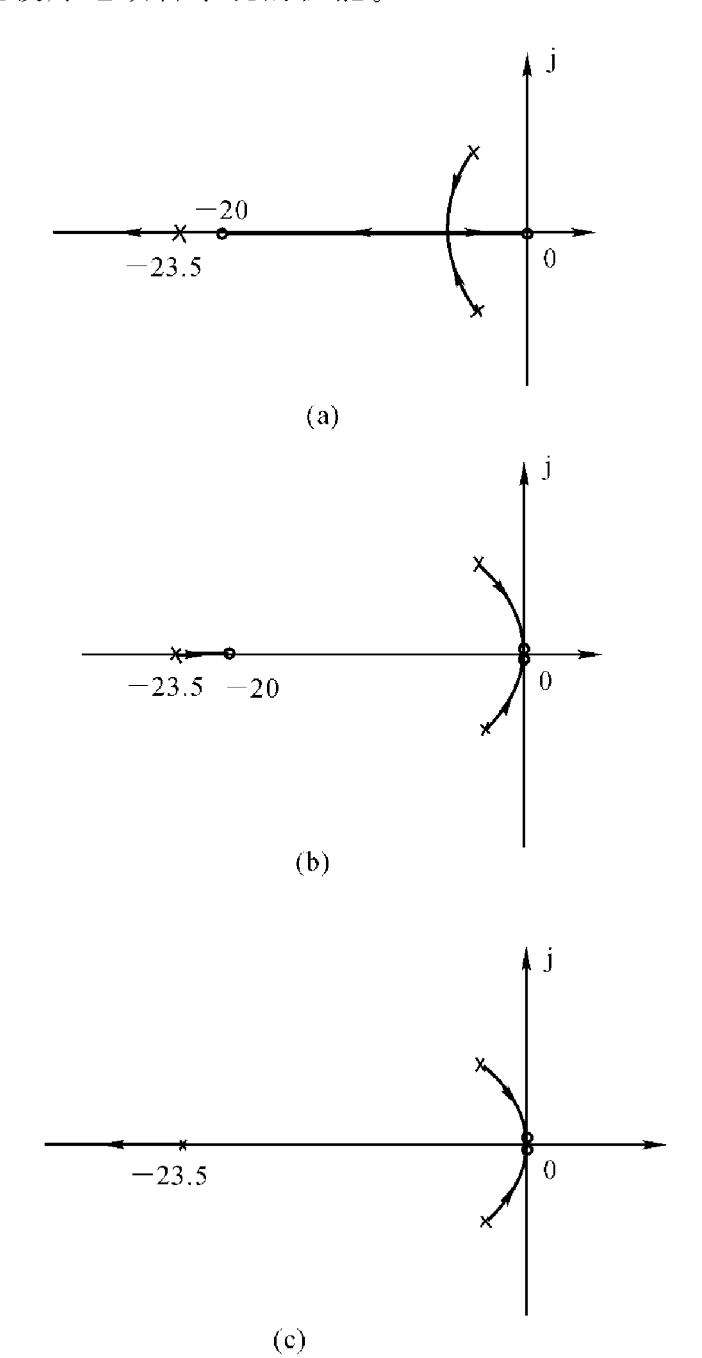


图 4.10 $G_c(s)$不同时，系统的根轨迹

例 **4.10** 控制系统如图 4.11 所示，其中 $G_0(s)=\dfrac{1}{s(s+6)}$。

(1) 如果采用串联 PID 校正($H(s)=0$)$G_c(s)=1+\dfrac{0.5}{s}+0.0625s$，绘制闭环系统的根轨迹。若要求系统的超调量 $\sigma\%=16\%$，在根轨迹上标出相应的闭环主导极点的位置。

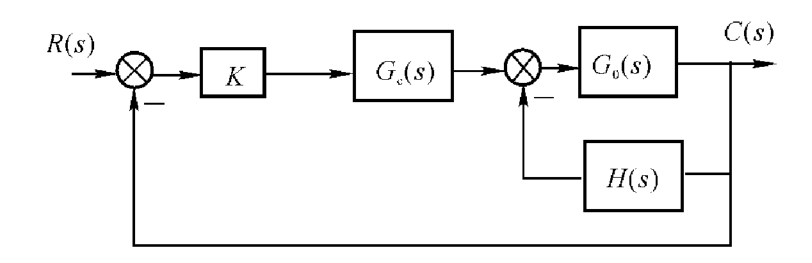


图 4.11 控制系统

(2) 如果采用反馈校正($G_c(s)=1$),$H(s)=K_1 s$,设 $K=50$,绘制 $0\leqslant K_1\leqslant +\infty$ 的根轨迹。若要求系统的超调量 $\sigma\%=4.3\%$,在根轨迹上标出闭环极点的位置,并求相应的 K_1 值。

解 (1) 开环传递函数

$$G(s)=KG_c(s)G_0(s)=K\frac{0.0625s^2+s+0.5}{s}\cdot\frac{1}{s(s+6)}=\frac{K}{16}\frac{(s+15.5)(s+0.5)}{s^2(s+6)}$$

实轴上的根轨迹为$[-6,-0.5]$,$(-\infty,-15.5]$。

分离点与会合点为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{s^2(s+6)}{(s+15.5)(s+0.5)}\right]=0$$

得
$$s^3+32s^2+120s+96=0$$

求解得
$$s_1=-1.13,\ s_2=-3.06,\ s_3=-27.81$$

根轨迹如图 4.12(a)所示。

由 $\sigma\%=\mathrm{e}^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times100\%=16\%$ 得 $\xi=0.5$,($\beta=\cos^{-1}\xi=60°$)。过原点作与负实轴夹角为$\pm60°$的阻尼线,该直线与根轨迹的交点 s_4,s_5 即是闭环主导极点。

(2) 系统的开环传递函数

$$G(s)=K\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)H(s)}=\frac{50}{s(s+6+K_1)}$$

闭环特征方程

$$D(s)=s^2+6s+K_1 s+50=0$$

故等效开环传递函数为

$$G'(s)=\frac{K_1 s}{s^2+6s+50}$$

开环零点 $Z_1=0$,开环极点 $P_{1,2}=-3\pm \mathrm{j}6.4$。

实轴上的根轨迹为$(-\infty,0]$。

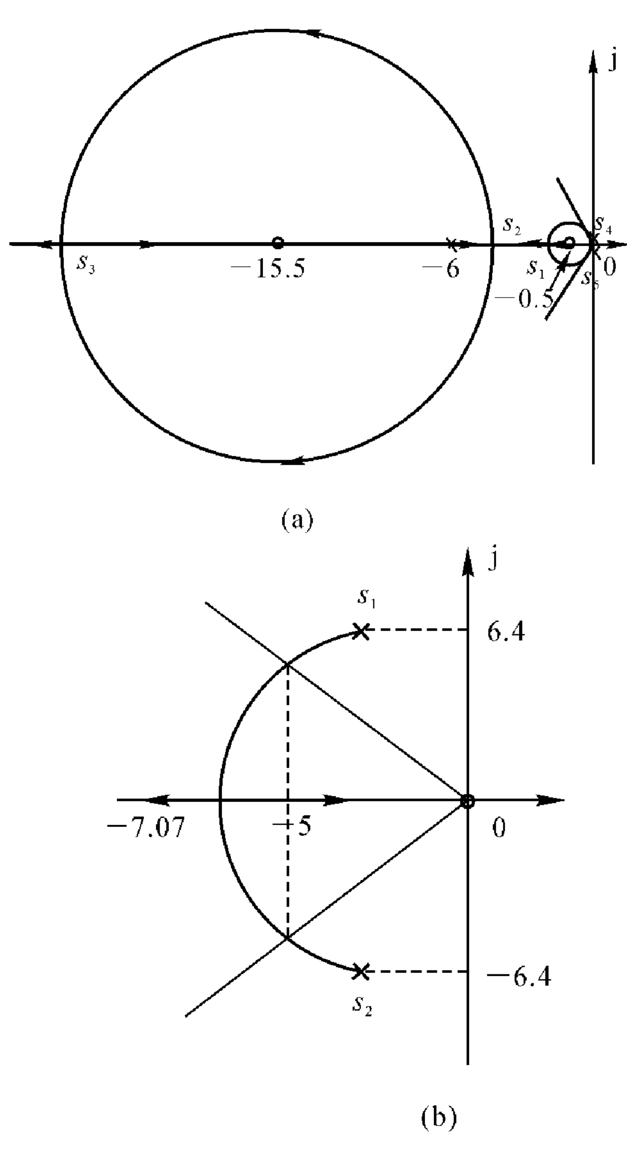


图 4.12 校正系统的根轨迹

分离点及会合点为

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+6s+50}{s}\right]=\frac{s^2-50}{s^2}=0$$

即 $$s=\pm 7.07(s=+7.07\text{ 舍去})$$

出射角

$$\theta_{p1}=-180^\circ+\angle(P_1-Z_1)-\angle(P_1-P_2)=$$
$$-180^\circ+115.1^\circ-90^\circ=-154.9^\circ$$

由对称性 $$\theta_{p2}=154.9^\circ$$

根轨迹如图 4.12(b)所示。

由 $\sigma\%=4.3\%$，得 $\xi=0.707$，考虑到特征方程

$$s^2+(6+K_1)s+50=0$$

其中 $\omega_n=\sqrt{50}$，$2\xi\omega_n=6+K_1$，得 $K_1=4$。

闭环极点为

$$s_{1,2}=-5\pm j5$$

例 **4.11**　已知系统开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s+a)}{s(s^2+2s+2)}$$

试绘制当 K^* 取不同值时，以 a 为变量的参数根轨迹簇。

解　(1) 当 $a=0$ 时，系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^* s}{s(s^2+2s+2)}=\frac{K^*}{s^2+2s+2}$$

当 $K^*=0\to\infty$ 时，根轨迹如图 4.13 中虚线所示。

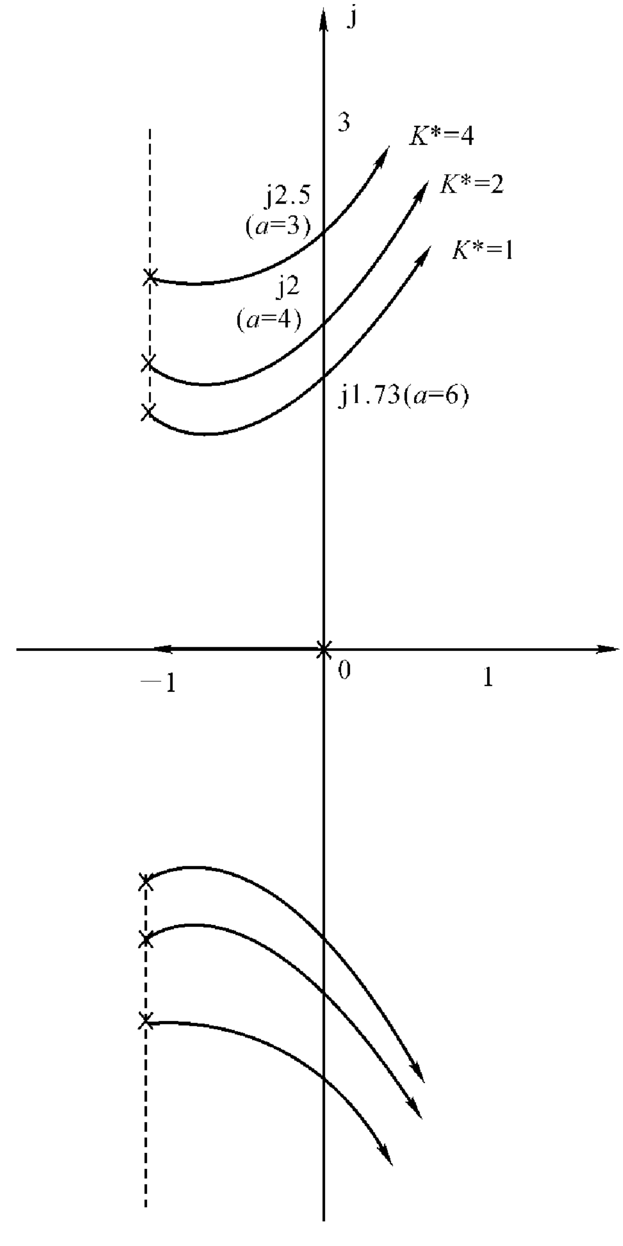


图 4.13　根轨迹簇

(2) 以 a 为参变量时的根轨迹。

系统的特征方程为

$$D(s)=s^3+2s^2+(2+K^*)s+K^*a=0$$

由此得 a 为参变量的等效开环传递函数

$$G_{等}(s)=\frac{aK^*}{s(s^2+2s+2+K^*)}$$

开环极点

$$P_1=0,\ P_{2,3}=-1\pm \mathrm{j}\sqrt{1+K^*}$$

实轴上$(-\infty,0]$是根轨迹。

渐近线
$$\sigma_a=\frac{0-1-1}{3}=-\frac{2}{3}$$

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3},\pi$$

与虚轴交点
$$\omega=\pm\sqrt{K^*+2}$$

对应临界稳定的参变量

$$a=\frac{2K^*+4}{K^*}$$

取 $K^*=1,2,4$ 时,可作出 a 的参数根轨迹簇如图 4.13中实线所示。

由图中可见 K^* 值越大,使系统稳定的 a 值范围就越小。也就是说,K^* 越大,越要求开环零点 $Z=-a$ 靠近开环极点 $P_1=0$,以保证系统稳定。

【点评】 根轨迹簇的绘制有两步。

首先,绘制参数 $a=0$ 时,K^* 从 $0\to\infty$ 变化时的常规根轨迹。这个常规根轨迹决定下步绘制的根轨迹簇的起点位置;其次,绘制 K^* 取不同值时,a 从 $0\to\infty$ 时的根轨迹簇。

第五章

线性系统的频域分析法

5.1　一单位反馈系统，其开环传递函数 $G(s)=\dfrac{1}{s+1}$。试根据频率特性的物理意义，求下列信号输入作用时系统的稳态输出 c_{ss} 和稳态误差 e_{ss}。

(1) $r(t)=\sin 2t$；

(2) $r(t)=\sin(t+30^\circ)-2\cos(2t-45^\circ)$。

解　系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{1}{s+2}$$

频率特性为

$$\Phi(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2+\mathrm{j}\omega}$$

幅频特性

$$|\Phi(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$$

相频特性

$$\angle\Phi(\mathrm{j}\omega)=-\arctan\frac{\omega}{2}$$

系统误差传递函数为

$$\Phi_e(s)=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{s+1}{s+2}$$

$$\Phi_e(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega+1}{\mathrm{j}\omega+2}$$

$$|\Phi_e(\mathrm{j}\omega)|=\sqrt{\frac{1+\omega^2}{4+\omega^2}}$$

$$\angle\Phi_e(\mathrm{j}\omega)=\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}$$

(1) 当 $r(t) = \sin 2t$ 时，$\omega = 2, R_0 = 1$

$$|\Phi(2\mathrm{j})| = \frac{\sqrt{2}}{4},\ \angle\Phi(2\mathrm{j}) = -45^\circ$$

系统稳态输出

$$c_{ss}(t) = R_0 |\Phi(2\mathrm{j})| \sin(\omega t + \angle\Phi(2\mathrm{j})) = \frac{\sqrt{2}}{4}\sin(2t - 45^\circ)$$

$$|\Phi_e(2\mathrm{j})| = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\angle\Phi_e(2\mathrm{j}) = \arctan 2 - \arctan 1 = \arctan\frac{1}{3}$$

系统稳态误差

$$e_{ss}(t) = R_0 |\Phi_e(2\mathrm{j})| \sin(2t + \angle\Phi_e(2\mathrm{j})) = \frac{\sqrt{10}}{4}\sin(2t + \arctan\frac{1}{3})$$

(2) 当 $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ)$ 时，系统响应可看做由 $r_1(t) = \sin(t + 30^\circ)$ 和 $r_2(t) = -2\cos(2t - 45^\circ)$ 分别作用的结果的叠加。

$r_1(t) = \sin(t + 30^\circ)$ 单独作用时，$R_0 = 1, \omega = 1$，$|\Phi(\mathrm{j}1)| = \frac{1}{\sqrt{5}}$，$\angle\Phi(\mathrm{j}1) = -\arctan\frac{1}{2}$，$|\Phi_e(\mathrm{j}1)| = \sqrt{\frac{2}{5}}$，$\angle\Phi_e(\mathrm{j}1) = \arctan\frac{1}{3}$

所以 $$c_{1ss}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(t + 30^\circ - \arctan\frac{1}{2}\right)$$

$$e_{1ss}(t) = \sqrt{\frac{2}{5}}\sin\left(t + 30^\circ + \arctan\frac{1}{3}\right)$$

$r_2(t) = -2\cos(2t - 45^\circ)$ 单独作用，$R_0 = -2$，$\omega = 2$，$|\Phi(\mathrm{j}2)|$，$\angle\Phi(\mathrm{j}2)$，$|\Phi_e(\mathrm{j}2)|$，$|\Phi_e(\mathrm{j}2)|$ 如第(1)问中的结果

所以 $$c_{2ss}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2t - 45^\circ - 45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2t - 90^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t$$

$$e_{2ss}(t) = -\frac{\sqrt{10}}{2}\cos\left(2t - 45^\circ + \arctan\frac{1}{3}\right)$$

因此 $$c_{ss}(t) = c_{1ss}(t) + c_{2ss}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(t + 30^\circ - \arctan\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t$$

$$e_{ss}(t) = e_{1ss}(t) + e_{2ss}(t) = \frac{\sqrt{10}}{5}\sin\left(t + 30^\circ + \arctan\frac{1}{3}\right) - \frac{\sqrt{10}}{2}\cos\left(2t - 45^\circ + \arctan\frac{1}{3}\right)$$

5.2　系统结构图如图 5.1 所示，当输入 $r(t)=2\sin t$ 时，测得稳态输出 $c(t)=4\sin(t-45°)$，试确定系统的参数 ξ,ω_n。

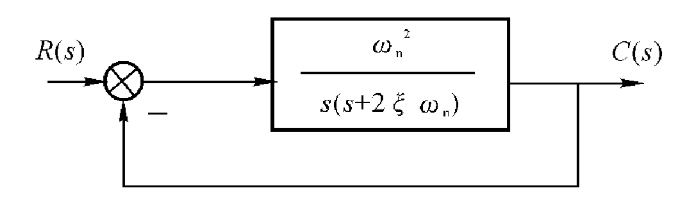


图 5.1　系统结构图

解　系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

系统幅频特性为

$$|\Phi(j\omega)|=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_n^2\omega^2}}$$

相频特性为

$$\angle\Phi(j\omega)=-\arctan\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}$$

由题意

$$c(t)=4\sin(t-45°)=2\,|\Phi(j1)|\sin(t+\angle\Phi(j1))$$

即

$$|\Phi(j1)|=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-1)^2+4\xi^2\omega_n^2}}=2$$

$$\angle\Phi(j1)=-\arctan\frac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2-1}=-45°$$

故

$$\begin{cases}\omega_n^4=4[(\omega_n^2-1)^2+4\xi^2\omega_n^2]\\ 2\xi\omega_n=\omega_n^2-1\end{cases}$$

解得

$$\omega_n=1.244,\quad \xi=0.22$$

【点评】　正确理解频率特性的物理意义是求解例 5.1 和 5.2 的关键。当对稳定的线性定常系统施加正弦输入 $r(t)=R_0\sin\omega t$ 时，系统的稳态输出亦是同频率的正弦信号，其表达式为 $c(t)=R_0\,|\Phi(j\omega)|\sin(\omega t+\angle\Phi(j\omega))$，其中 $|\Phi(j\omega)|$ 和 $\angle\Phi(j\omega)$ 分别是系统的幅频特性和相频特性。

5.3　设控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$$

(1) 写出其实频特性、虚频特性、幅频特性及相频特性的表达式；

(2) 画出当 $K=10,T_1=0.2,T_2=0.04,T_3=0.08$ 时的幅相特性曲线。

解　(1) 系统的频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K}{(j\omega T_1+1)(j\omega T_2+1)(j\omega T_3+1)}=$$

$$K\frac{1-\mathrm{j}\omega T_1}{1+\omega^2T_1^2}\frac{1-\mathrm{j}\omega T_2}{1+\omega^2T_2^2}\frac{1-\mathrm{j}\omega T_3}{1+\omega^2T_3^2}=$$

$$A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=U(\omega)+\mathrm{j}V(\omega)$$

实频特性

$$U(\omega)=\frac{K[1-(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1)\omega^2]}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)(1+T_3^2\omega^2)}$$

虚频特性

$$\frac{K[T_1T_2T_3\omega^3-(T_1+T_2+T_3)\omega]}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)(1+T_3^2\omega^2)}$$

幅频特性

$$A(\omega)=\frac{K}{\sqrt{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)(1+T_3^2\omega^2)}}$$

相频特性

$$\varphi(\omega)=-\arctan T_1\omega-\arctan T_2\omega-\arctan T_3\omega$$

(2) 当 $K=10,T_1=0.2,T_2=0.04,\ T_3=0.08$ 时绘制幅相曲线的方法有多种。

解法 1　描点法

取不同的 ω 值,可计算出 $A(\omega),\varphi(\omega),U(\omega),V(\omega)$ 如表 5.1 所示,根据表中 $A(\omega),\varphi(\omega)$ 或 $(U(\omega),V(\omega))$ 在 s 平面上描点绘制出幅相曲线(见图 5.2(a))。这种方法相对较准确。

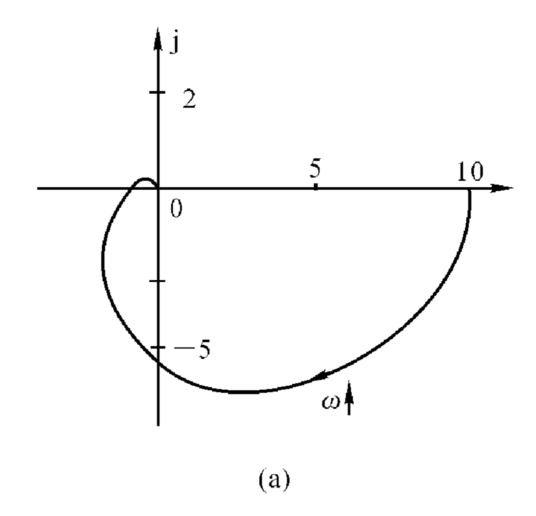
表　5.1

ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$	$U(\omega)$	$V(\omega)$	ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	10	0	10	0	0.5	9.9	−9.1	9.8	−1.6
1.25	9.6	−22.6	8.9	−3.7	2	9.1	−35.4	7.4	−5.3
2.5	8.7	−43.6	6.3	−6.0	5	6.4	−78	1.3	−6.3
6.25	5.4	−92	0.18	−5.4	10	3.2	−124	−1.8	−2.69
12.5	2.3	−140	−1.79	−1.5	20	1	−173	−1	−0.13
25	0.62	−187	−0.6	0.08	50	0.1	−223	−0.08	0.07
100	0.015	−246	−0.006	0.014	∞	0	−270	0	0

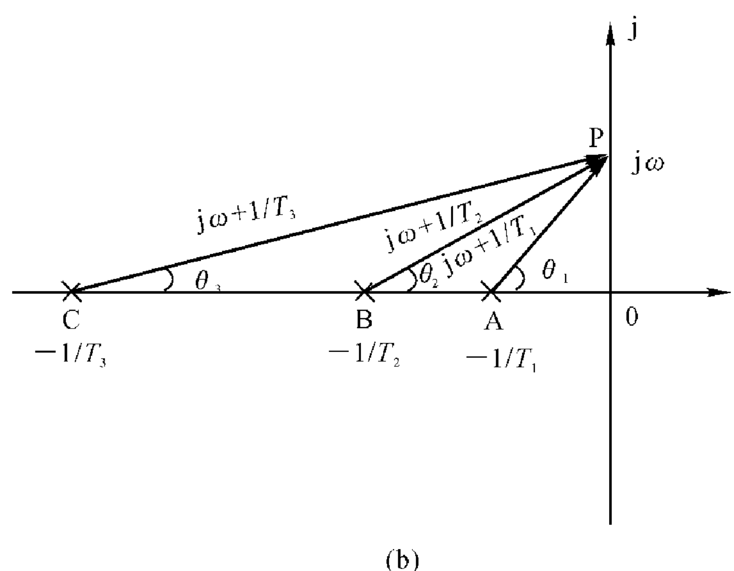
解法 2　零-极点分布图法

首先将开环传递函数 $G(s)H(s)$ 变形为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{T_1T_2T_3\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)\left(s+\frac{1}{T_3}\right)}$$



(a)



(b)

图 5.2　系统的零极点分布图及幅相曲线

(a) 幅相曲线;(b) 系统的零极点分布图

将系统的开环极点零点在 s 平面中标出,见图 5.2(b)。

则系统的频率特性为

$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{K}{T_1T_2T_3\left(\mathrm{j}\omega+\dfrac{1}{T_1}\right)\left(\mathrm{j}\omega+\dfrac{1}{T_2}\right)\left(\mathrm{j}\omega+\dfrac{1}{T_3}\right)}$$

当 $\omega=0\to\infty$ 时,动点 P 沿虚轴移动,任选 ω,此时 $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 的幅频特性为

$$|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{K}{T_1T_2T_3|\boldsymbol{AP}||\boldsymbol{BP}||\boldsymbol{CP}|}$$

而相频特性

$$\angle G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=-\theta_1-\theta_2-\theta_3$$

故只需对确定的 ω,量取向量 $\boldsymbol{AP}$,$\boldsymbol{BP}$,$\boldsymbol{CP}$ 的长度和角度即可求得幅频特性和相频特性,绘出开环幅相曲线。

解法 **3** 根据特殊点的幅相特性概略绘制幅相曲线。

幅相曲线的特殊点包括起点($\omega=0$ 或 0^+ 时),终点($\omega=\infty$ 时),$\omega=\dfrac{1}{T}$ 交接(转折) 频率处的点及与坐标轴的交点等。确定幅相曲线的起点与终点是绘制系统幅相曲线的关键。起点、终点的确定可以用解析法确定,也可从零极点分布图上确定,也可以由组成系统的各典型环节的频率特性确定。

(1) 针对本题,首先确定起点与终点:

解析法确定起点终点。

起点: $\omega=0$ 时,$A(0)=K=10$,$\varphi(0)=0^\circ$

终点: $\omega=\infty$ 时,$A(\infty)=0$,$\varphi(\infty)=270^\circ$

零极点分布图法确定起点、终点。

起点:$\omega=0$ 时,如图 5.2(b) 所示,此时 P 点与坐标原点重合。

$$|G(\mathrm{j}0)H(\mathrm{j}0)|=K=10,\qquad \angle G(\mathrm{j}0)H(\mathrm{j}0)=0^\circ$$

终点:$\omega=\infty$ 时,P 点在正虚轴无穷远处。

$$|G(\mathrm{j}\infty)H(\mathrm{j}\infty)|=0,\qquad \angle G(\mathrm{j}\infty)H(\mathrm{j}\infty)=-270^\circ$$

根据典型环节的幅相特性确定起点和终点。

系统由 4 个典型环节组成。

比例环节 K:$0^\circ\sim0^\circ$

惯性环节$\dfrac{1}{T_1s+1}$:$0^\circ\sim-90^\circ$

惯性环节$\dfrac{1}{T_2s+1}$:$0^\circ\sim-90^\circ$

惯性环节$\dfrac{1}{T_3s+1}$:$0^\circ\sim-90^\circ$

因而 $\varphi(\omega)=0^\circ\sim-270^\circ$

$$|G(\mathrm{j}0)H(\mathrm{j}0)|=\lim_{\omega\to0}|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|=K$$

$$|G(\mathrm{j}\infty)H(\mathrm{j}\infty)|=\lim_{\omega\to\infty}|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|=0$$

确定了幅相曲线的起点与终点以后,又由于系统没有零点,说明相频特性 $\varphi(\omega)$ 从 0° 递减至 -270°,可看出幅相曲线与负虚轴和负实轴有交点。下面计算这两个特殊点的坐标。

(2) 幅相曲线与虚轴交点

此时 $$U(\omega)=0$$

即 $$1-(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1)\omega^2=0$$

得 $$\omega=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1}}$$

代入 $$V(\omega)=\frac{-K\sqrt{T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1}}{A}$$

式中 $$A=\frac{2T_1T_2T_3+T_1^2(T_2+T_3)+T_2^2(T_1+T_3)+T_3^2(T_1+T_2)}{T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1}$$

(3) 幅相曲线与实轴交点

由 $$V(\omega)=0$$

即 $$T_1T_2T_3\omega^2-(T_1+T_2+T_3)=0$$

得 $$\omega=\sqrt{\frac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3}}$$

故代入

$$U(\omega)=\frac{-KT_1T_2T_3}{T_1^2(T_2+T_3)+T_2^2(T_1+T_3)+T_3^2(T_1+T_2)+2T_1T_2T_3}$$

当 $K=10,T_1=0.2,T_2=0.04,T_3=0.08$ 时

起点为 $$G(\mathrm{j}0)H(\mathrm{j}0)=10\angle 0^\circ$$

终点 $$G(\mathrm{j}\infty)H(\mathrm{j}\infty)=0\angle -270^\circ$$

与虚轴交点 $$V(\omega)=-5.56$$

与实轴交点 $$U(\omega)=-0.793$$

【点评】　开环传递函数可写成如下一般形式

$$G(s)=\frac{K(\tau_1s+1)(\tau_2^2s^2+2\xi_2\tau_2s+1)\cdots}{s^v(T_1s+1)(T_2^2s^2+2\xi_2T_2s+1)\cdots}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n},(n>m)$$

开环系统幅相特性有以下特点：

(1) 低频段：$\omega\to 0$ 时，$G(\mathrm{j}\omega)$ 特性可表示为

$$\lim_{\omega\to 0}G(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\omega\to 0}\frac{K}{(\mathrm{j}\omega)^v}=\lim_{\omega\to 0}\frac{K}{\omega^v}\angle(-v\frac{\pi}{2})$$

开环系统低频起始段的幅相特性只取决于系统的开环增益和积分环节的数目 v，而与惯性、振荡、一阶微分等环节无关。v 值不同的低频起始段幅相曲线如图 5.3 所示。

(2) 高频段：$\omega\to\infty$ 时，$G(\mathrm{j}\omega)$ 特性可表示为

$$\lim_{\omega\to\infty}G(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\omega\to\infty}\frac{b_0}{(\mathrm{j}\omega)^{n-m}}=\lim_{\omega\to\infty}\frac{b_0}{\omega^{n-m}}\angle\left(-(n-m)\frac{\pi}{2}\right)$$

对于一般物理系统 $n>m$，则

$$\lim_{\omega\to\infty}G(\mathrm{j}\omega)=0\angle\left(-(n-m)\frac{\pi}{2}\right)$$

即当 $\omega\to\infty$ 时，幅相特性曲线以 $-(n-m)\dfrac{\pi}{2}$ 的相位角收敛于 G 平面坐标原点，如图 5.4 所示。

(3) 中频段：若传递函数中不存在复合微分环节，幅相曲线相位连续减小，曲线就光滑地变化，反之，如果存在复合微分环节，则幅相曲线会出现凹凸。为了估计中频段的大致形

状,可令 $\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]=V(\omega)=0$,能找到幅相曲线与实轴的交点。同样,令 $\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]=U(\omega)=0$,找到曲线与虚轴的交点。如需精确绘制,还可取不同的频率 ω 值,求取相应的 $G(\mathrm{j}\omega)$,最终将 s 平面上表示这些 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的点用光滑的曲线连接起来。

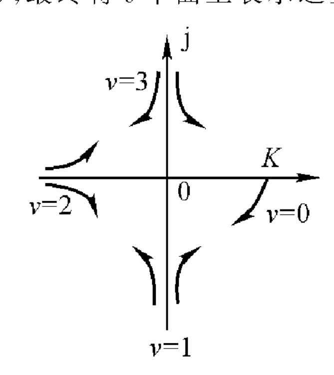


图 5.3 $G(\mathrm{j}\omega)$ 幅相曲线的起始段特性

图 5.4 $G(\mathrm{j}\omega)$ 幅相曲线高频段特性

综上所述,幅相曲线的一般作图方法为

(1) 写出 $G(\mathrm{j}\omega)$ 表达式;

(2) 求起点和终点(三种方法,见例 5.3);

(3) 求幅相曲线与实轴的交点

令 $\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]=V(\omega)=0$ 或令 $\angle G(\mathrm{j}\omega)=n\times180^\circ$ 求出;

(4) 求幅相曲线与虚轴的交点

令 $\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]=U(\omega)=0$ 或令 $\angle G(\mathrm{j}\omega)=n\times90^\circ$ 求出;

(5) 必要时画出幅相曲线中间点;

(6) 勾画出大致曲线。

5.4 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{20(3s+1)}{s^2(6s+1)(s^2+4s+25)(10s+1)}$$

试绘制开环对数频率特性曲线。

解 (1) 将 $G(s)$ 写成各典型环节的乘积形式

$$G(s)=\frac{20(3s+1)}{25s^2(6s+1)\left(\frac{s^2}{25}+\frac{4}{25}s+1\right)(10s+1)}=$$

$$\frac{0.8(3s+1)}{s^2(10s+1)(6s+1)\left(\frac{s^2}{25}+\frac{4}{25}s+1\right)}$$

(2) 将交接频率从小到大标在 ω 轴上

$\omega_1=0.1$ 是惯性环节 $\frac{1}{10s+1}$ 的交接频率;

$\omega_2=0.166$ 是惯性环节 $\frac{1}{6s+1}$ 的交接频率;

$\omega_3=0.333$ 是一阶微分环节 $3s+1$ 的交接频率;

$\omega_4 = 5$ 是振荡环节 $\dfrac{1}{\dfrac{s^2}{25}+\dfrac{4}{25}s+1}$ 的交接频率。

(3) 计算 $20\lg K = 20\lg 0.8 = -1.9$ dB 或 $\omega = K^{\frac{1}{v}} = 0.8^{\frac{1}{2}} = 0.894$

做点 $A(1, -1.9$ dB) 或在 0 分贝线上(ω 轴上)，找 B 点(0.894，0 dB)。

(4) 过 A 点(或 B 点) 做斜率为 $v\times(-20) = -40$ dB/dec 的直线到第一个交接频率 $\omega_1 = 0.1$ 处。

(5) 在 $\omega_1 = 0.1$ 之后斜率变为 -60 dB/dec 的直线至 $\omega_2 = 0.166$，之后直线斜率变为 -80 db/dec 至 $\omega_3 = 0.333$，在 $\omega_3 = 0.333$ 处，直线斜率再变为 -60 dB/dec，最后在 $\omega_4 = 5$ 处，直线斜率变为 -100 dB/dec。

(6) 绘制各典型环节的相频特性 $\varphi_i(\omega)$ 并将其叠加，即可得开环系统对数相频特性。

本开环系统的对数频率特性曲线见图 5.5。

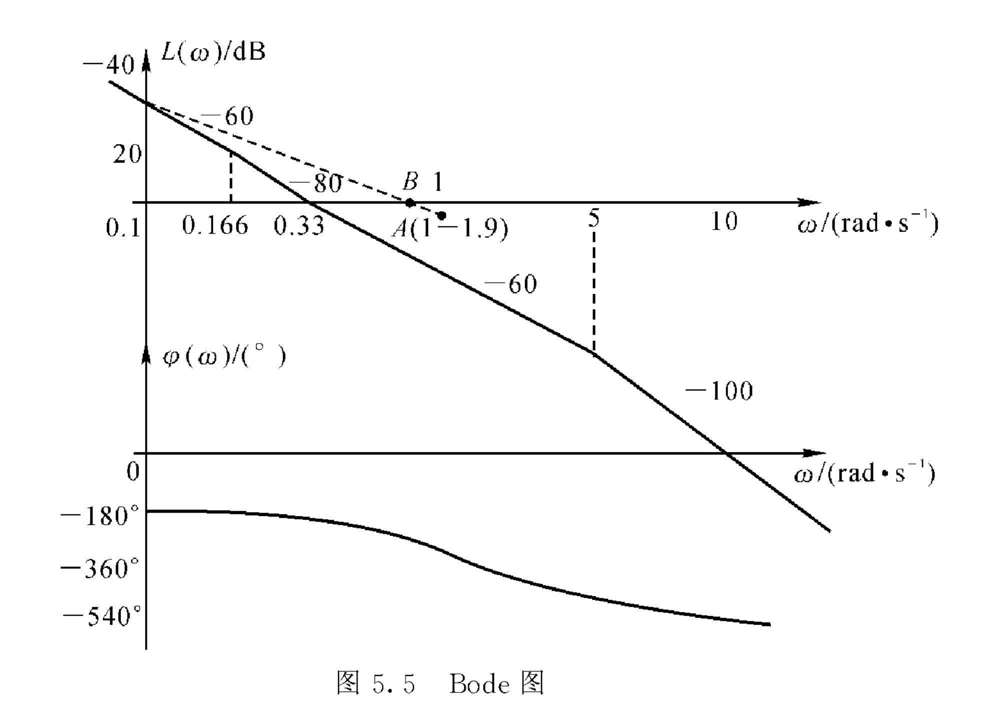


图 5.5　Bode 图

【点评】　绘制开环系统对数频率特性曲线(Bode 图) 的步骤：

① 将开环传递函数 $G(s)$ 改写成典型环节的乘积形式；

② 找出各典型环节的交接(转折) 频率，并从小到大依次标在 ω 轴上；

③ 计算 $20\lg K$，并做点 $A(\omega = 1, L(\omega) = 20\lg K)$ 或计算 $\omega = K^{\frac{1}{v}}$，做点 $B(\omega = K^{\frac{1}{v}}, L(\omega) = 0$ dB)；

④ 从低频开始过 A 点或 B 点做斜率为 $-v\times 20$ dB/dec 的直线(最左端频率特性)；

⑤ 依交接频率从小到大，以合适的斜率画对数幅频特性曲线 $L(\omega)$。在每个交接频率处，$L(\omega)$ 曲线的斜率变化一次，变化的数值与该交接频率对应的典型环节类型有关；

⑥ 需要精确绘制，则需校正；

⑦ 绘出各典型环节的 $\varphi_i(\omega)$ 并叠加，即可得到开环系统对数相频特性曲线。

5.5 已知最小相位系统概略的开环对数幅频特性如图 5.6 所示，试确定系统的开环传递函数。

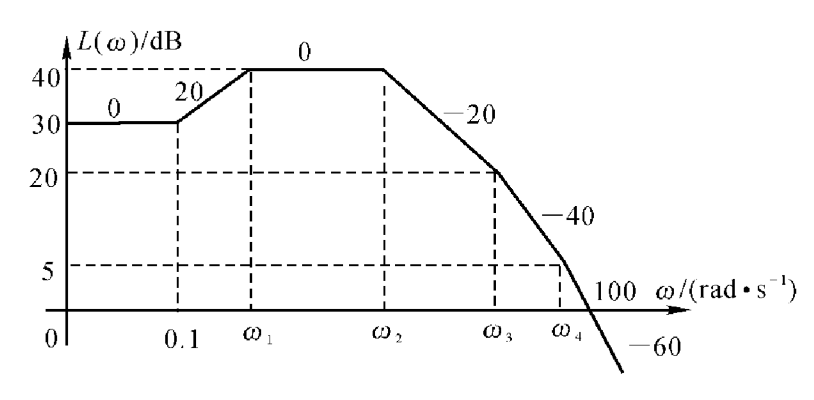


图 5.6 对数幅频特性

解 由图 5.6 可知，低频段渐近线斜率为 0。说明系统中积分环节个数 $v=0$；又由于低频段最左端直线的延长线过点(1,30dB)，则可求出开环增益 K。

$$20\lg K = 30$$

故

$$K = 31.62$$

渐近线在各交接频率处斜率的变化量，决定着各交接频率对应的典型环节类型。$\omega=0.1$ 处，$L(\omega)$ 斜率变化 20 dB/dec，是一阶微分环节的交接频率；在 $\omega=\omega_1, \omega=\omega_2, \omega=\omega_3, \omega=\omega_4$ 处，$L(\omega)$ 斜率变化 −20 dB/dec，是惯性环节的交接频率。

因为最小相位系统的传递函数与系统的对数幅频特性存在一一对应关系，所以系统的开环传递函数形式可以初步确定为

$$G(s) = \frac{K\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_1}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_2}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_3}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_4}+1\right)}$$

其中 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ 待定。因为 $L(\omega)$ 渐近线是折线，相邻两交接频率间是直线，因此，如果假设直线斜率为 k，$(\omega_A, L(\omega_A))$，$(\omega_B, L(\omega_B))$ 是该直线上两点，则直线方程为

$$L(\omega_A) - L(\omega_B) = k(\lg\omega_A - \lg\omega_B)$$

故

$$40 - 30 = 20 \times (\lg\omega_1 - \lg 0.1)$$

所以

$$\omega_1 = 0.316 \text{ rad/s}$$

$$5 - 0 = -60 \times (\lg\omega_4 - \lg 100)$$

所以

$$\omega_4 = 82.54 \text{ rad/s}$$

$$20 - 5 = -40 \times (\lg\omega_3 - \lg\omega_4)$$

所以
$$\omega_3 = 34.81\ \text{rad/s}$$
$$40 - 20 = -20 \times (\lg\omega_2 - \lg\omega_3)$$
所以
$$\omega_2 = 3.481\ \text{rad/s}$$
因此，所求的开环传递函数
$$G(s) = \frac{31.62 \times \left(\dfrac{s}{0.1} + 1\right)}{\left(\dfrac{s}{0.316} + 1\right)\left(\dfrac{s}{3.481} + 1\right)\left(\dfrac{s}{34.81} + 1\right)\left(\dfrac{s}{82.54} + 1\right)}$$

5.6 已知最小相位系统的开环对数幅频特性如图 5.7 所示(实线部分)，写出系统的开环传递函数。

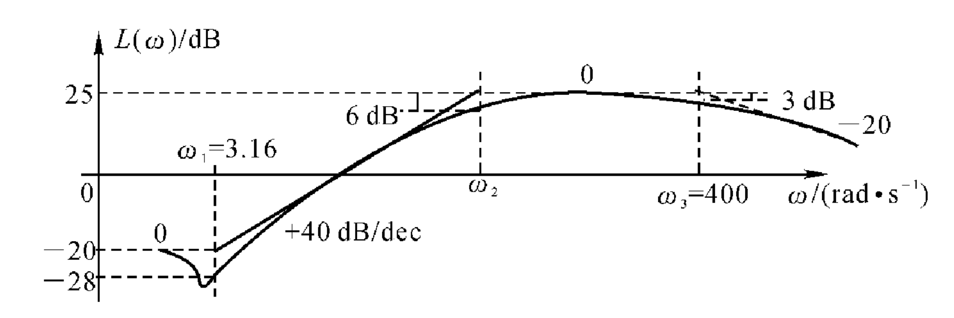


图 5.7 对数幅频特性

解 对于实验方法得到的对数幅频特性曲线，为了能够求出各交接频率，需将测得的对数幅频特性曲线用斜率为 0，±20，±40 dB/dec… 等直线近似。近似后曲线见图 5.7 折线部分。

最左端直线斜率为 0，说明系统是 0 型的，又因最左端直线一定过点(1，−20)，则可知开环增益 K：$20\lg K = -20$，故 $K = 0.1$。$\omega_1 = 3.16$ 处，$L(\omega)$ 斜率变化 40 dB/dec，说明系统含有一个二阶微分环节，而在 $\omega_1 = 3.16$ 附近，出现了谐振峰值，因此二阶微分环节的阻尼比 $0 < \xi < 1$。在 ω_2 处，$L(\omega)$ 斜率由 40 dB/dec 变为 0 dB/dec，又因为 ω_2 处精确特性比渐近特性小 6 dB，说明在 ω_2 处有一个 $\xi = 1$ 的二阶环节(或认为 ω_2 是两个相同的惯性环节的交接频率)。在 $\omega_3 = 400$ 处，$L(\omega)$ 的斜率由 0 dB/dec 变为 −20 dB/dec，而且在 ω_3 处精确特性比渐近特性少 3 dB，所以 $\omega_3 = 400$ 是惯性环节的交接频率，这样，系统的开环传递函数可表示为
$$G(s) = \frac{K(\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1)}{(T_2 s + 1)^2 (T_3 s + 1)}$$
式中
$$K = 0.1$$
$$\tau = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{3.16}$$
$$T_3 = \frac{1}{\omega_3} = \frac{1}{400}$$

ξ, T_2 待定。

根据二阶微分环节的幅频特性在交接频率 ω_1 处，$L(\omega) = 20\lg 2\xi = -28-(-20) = -8$ dB，故可求出 $\xi = 0.199$。ω_2 的值可通过求解下列方程得到

$$-20-25 = 40 \times (\lg 3.16 - \lg\omega_2)$$

故
$$\omega_2 = 42$$

则
$$T_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{42}$$

所以，所求的开环传递函数

$$G(s) = \frac{0.1 \times \left[\left(\frac{1}{3.16}\right)^2 s^2 + 2 \times 0.199 \times \frac{1}{3.16}s + 1\right]}{\left(\frac{s}{42}+1\right)^2\left(\frac{s}{400}+1\right)}$$

5.7　已知最小相位系统的开环对数幅频特性如图 5.8 所示，(a) 中虚线是对应振荡环节或二阶微分环节的修正曲线，试写出系统的传递函数。

解　由图 5.8(a) 知，低频段渐近线的斜率为 -40 dB/dec，说明开环系统中有两个积分环节 $v = 2$，又因低频段渐近线的延长线与 0 dB 线交于 5.6231/s 处，所以开环增益 $K = \omega^v = 5.623^2 = 31.62$。

根据各交接频率处的斜率，确定对应的典型环节如下：

$\omega = \omega_1$ 处，$L(\omega)$ 斜率变化 -40 dB/dec，由修正曲线知为振荡环节的交接频率。

$\omega = \omega_2$ 处，$L(\omega)$ 斜率变化 $+40$ dB/dec，由修正曲线知为二阶微分环节的交接频率。

如此知，系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{K\left[\left(\frac{s}{\omega_2}\right)^2 + 2\xi_2\frac{s}{\omega_2} + 1\right]}{s^2\left[\left(\frac{s}{\omega_1}\right)^2 + 2\xi_1\frac{s}{\omega_1} + 1\right]}$$

式中
$$K = 31.62$$

$\omega_1, \omega_2, \xi_1, \xi_2$ 待定。

因为每段渐近线均是直线，因而可对每段渐近线列直线方程

$$L(\omega_1) - 0 = -40(\lg\omega_1 - \lg 5.623)$$

$$L(\omega_1) - 0 = -80(\lg\omega_1 - \lg 3)$$

故
$$\omega_1 = 1.6$$

$$-20 - 0 = -80(\lg\omega_2 - \lg 3)$$

所以
$$\omega_2 = 5.335$$

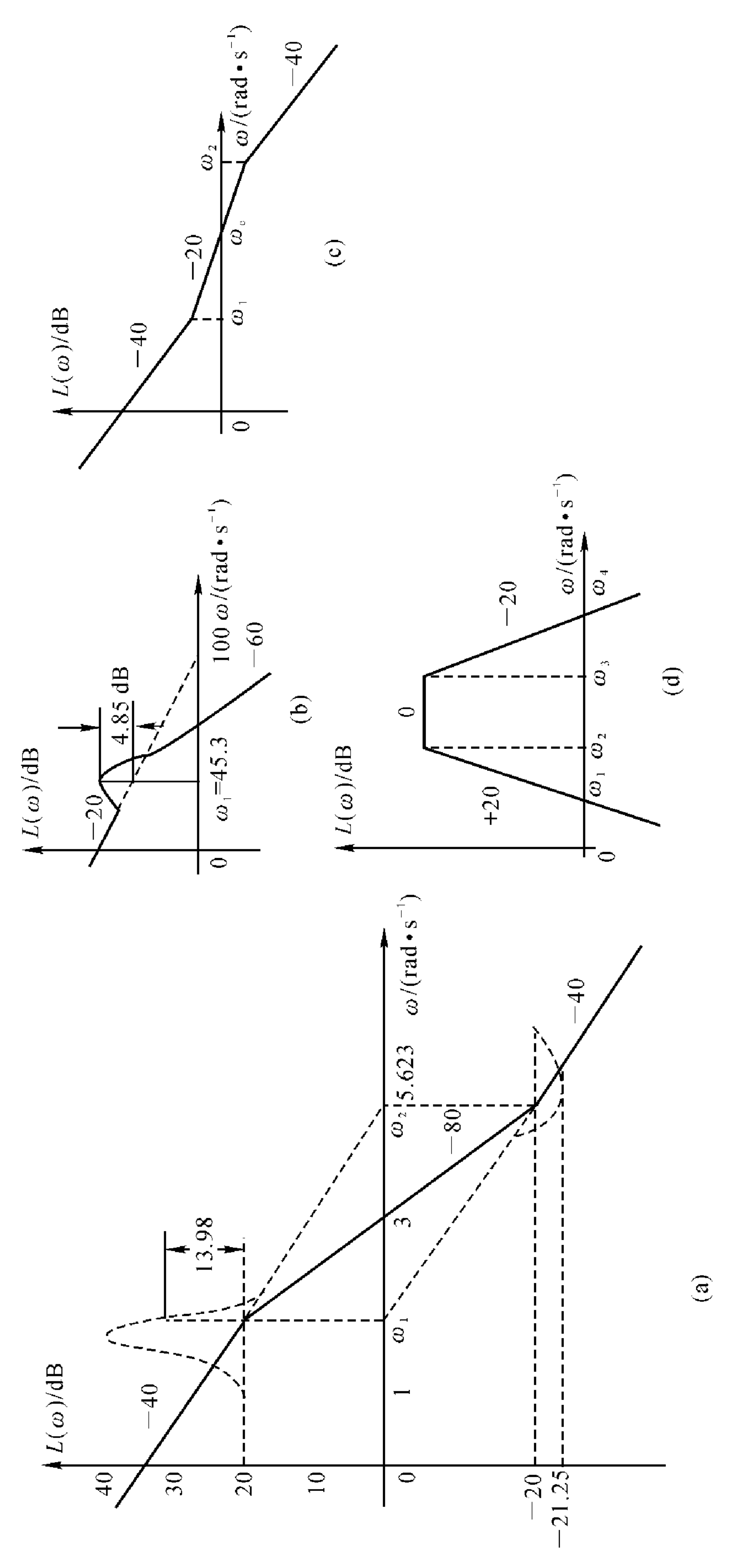


图 5.8　最小相位系统对数幅频特性

振荡环节在交接频率处的修正值为 $20\lg\dfrac{1}{2\xi_1}$，由图求得修正值为 13.98 dB，因此

$$20\lg\frac{1}{2\xi_1}=13.98$$

所以
$$\xi_1=0.1$$

二阶微分环节在谐振频率处的修正值为 $20\lg 2\xi_2\sqrt{1-\xi_2^2}$，由图可知修正值为 -1.25 dB，即

$$20\lg 2\xi_2\sqrt{1-\xi_2^2}=-1.25$$

故
$$\xi_2=0.5$$

因此，所求系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{31.62\left[\left(\dfrac{s}{5.332}\right)^2+\left(\dfrac{s}{5.332}\right)+1\right]}{s^2\left[\left(\dfrac{s}{1.6}\right)^2+0.2\left(\dfrac{s}{1.6}\right)+1\right]}$$

由图 5.8(b) 知，低频段 $L(\omega)$ 的斜率为 -20 dB/dec，说明开环传递函数中有一个积分环节 $v=1$。最左端 $L(\omega)$ 与零分贝线交点的频率为 $\omega_0=100$，则开环增益 $K=\omega_0^v=100$，$L(\omega)$ 斜率从 -20 dB/dec 变为 -60 dB/dec。由此可知开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s\left[\dfrac{s^2}{\omega_n^2}+2\xi\dfrac{s}{\omega_n}+1\right]}$$

式中
$$K=100$$

ω_n，ξ 待定。

振荡环节在谐振频率 ω_r 处的修正值为 $-20\lg 2\xi\sqrt{1-\xi^2}$，由图中可知修正值为 4.85，即有

$$-20\lg 2\xi\sqrt{1-\xi^2}=4.85$$

所以
$$\xi=0.3$$

由谐振频率
$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}=45.3$$

可求出
$$\omega_n=50$$

因而，所求系统的传递函数

$$G(s)=\frac{100}{s\left[\dfrac{s^2}{2\,500}+2\times 0.3\dfrac{s}{50}+1\right]}=\frac{100}{s(0.000\,4s^2+0.012s+1)}$$

对于图 5.8(c)，由开环对数幅频特性曲线可知，系统的开环传递函数形式为

$$G(s)=\frac{K\left(\frac{s}{\omega_1}+1\right)}{s^2\left(\frac{s}{\omega_2}+1\right)}$$

式中，ω_1，ω_2 已知；K 待定。

要求 K 值，可以利用 $\omega=\omega_c$ 处的分贝值已知的条件。求 K 值有两种方法。

解法 1　假设最左端直线与零分贝线交点的频率为 ω_0，则

$$L(\omega_1)-0=-40(\lg\omega_1-\lg\omega_0)$$

$$L(\omega_1)-0=-20(\lg\omega_1-\lg\omega_c)$$

联立求解，可得

$$\omega_0^2=\omega_1\omega_c$$

而

$$K=\omega_0^2=\omega_1\omega_c$$

解法 2　因

$$|G(j\omega_c)|=1$$

故

$$\frac{K\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega_1}\right)^2+1}}{\omega_c^2\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega_2}\right)^2+1}}=1$$

因为 $\omega_c>\omega_1$，$\omega_c<\omega_2$，利用近似关系 $\frac{\omega_c}{\omega_1}\gg 1$，$\frac{\omega_c}{\omega_2}\ll 1$，则

$$\frac{K\frac{\omega_c}{\omega_1}}{\omega_c^2}=1$$

可得

$$K=\omega_1\omega_c$$

因而，所求系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{\omega_1\omega_c\left(\frac{s}{\omega_1}+1\right)}{s^2\left(\frac{s}{\omega_2}+1\right)}$$

由图 5.8(d) 可知 $L(\omega)$ 曲线最左端直线斜率为 $+20$ dB/dec，说明开环传递函数中有一个微分环节，$v=-1$。最左端直线与零分贝线交于频率 ω_1 处，则系统开环增益

$$K=\omega_1^v=\frac{1}{\omega_1}$$

故系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{\frac{1}{\omega_1}s}{\left(\frac{s}{\omega_2}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_3}+1\right)}$$

【点评】　由最小相位系统的对数幅频特性曲线确定系统的传递函数时，首先要明确

对数幅频特性曲线的渐近线在相邻两交接频率之间是直线。如果$(\omega_A, L(\omega_A))$，$(\omega_B, L(\omega_B))$是某一段直线上的两点，此段直线的斜率为$k(k=0, \pm 20\ \mathrm{dB/dec}, \pm 40\ \mathrm{dB/dec}, \cdots)$，则一定有下列关系存在，$L(\omega_A)-L(\omega_B)=k(\lg\omega_A-\lg\omega_B)$。

其次要充分利用那些横纵坐标均已知的点，这样才能简单正确地确定传递函数中的有关参数。

5.8　已知一单位反馈系统，其开环传递函数

$$G(s)=\frac{K}{s(1+T_1 s)(1+T_2 S)}$$

试用奈氏判据判断其稳定性。

解　首先绘制渐近的开环幅相曲线。

起点：$\omega=0^+$ 时，$G(\mathrm{j}0^+)=\infty\angle-90^\circ$

终点：$\omega=\infty$ 时，$G(\mathrm{j}\infty)=0\angle-270^\circ$

因系统中无开环零点，所以相频特性 $\varphi(\omega)$ 单调递减，可知幅相曲线的大致趋势，容易分析而知幅相曲线与实轴有交点，而系统为 Ⅰ 型系统，幅相曲线起始时有渐近线，现求实轴交点的坐标和起始时的渐近线。

$$\begin{aligned}G(\mathrm{j}\omega)&=\frac{K}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega T_1)(1+\mathrm{j}\omega T_2)}=\\&\frac{K}{-\omega^2(T_1+T_2)+\mathrm{j}\omega(1-\omega^2T_1T_2)}=\\&\frac{-K(T_1+T_2)}{\omega^2(T_1+T_2)^2+(1-\omega^2T_1T_2)^2}-\\&\mathrm{j}\frac{K(1-\omega^2T_1T_2)}{\omega^3(T_1+T_2)^2+\omega(1-\omega^2T_1T_2)^2}=U(\omega)+\mathrm{j}V(\omega)\end{aligned}$$

与实轴交点：由 $V(\omega)=0$，得

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$$

代入 $U(\omega)$，得

$$U(\omega)\Big|_{\omega=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}}=-\frac{K(T_1T_2)}{T_1+T_2}$$

起始段渐近线

$$\lim_{\omega\to0^+}U(\omega)=-K(T_1+T_2)$$

根据上述分析，可概略作出幅相曲线如 5.9 所示。

稳定性分析：因 $v=1$，补$\dfrac{1}{4}$个半径无穷大的圆。又因系统开环 $G(s)$ 无 s 右半平面的极点，即 $P=0$，则

当$\dfrac{KT_1T_2}{T_1+T_2}<1$时，幅相曲线不包围$(-1,\mathrm{j}0)$点，即 $N=0$，那么 $Z=P-$

$2N = 0$,闭环系统稳定。

当$\dfrac{KT_1T_2}{T_1+T_2} > 1$时,幅相曲线顺时针包围$(-1,\mathrm{j}0)$点一圈,$N=-1$,则$Z=P-2N=2\neq 0$,则闭环系统不稳定。

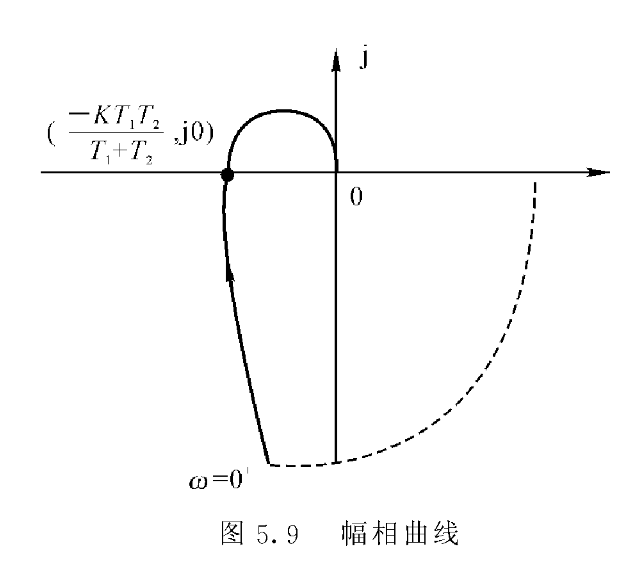


图 5.9　幅相曲线

5.9　已知某单位反馈系统,其开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{s(s+1)\left(\dfrac{s^2}{4}+1\right)}$$

要求:(1) 绘制幅相曲线及对数频率特性曲线;

(2) 判断闭环系统的稳定性;

(3) 求相角裕度γ和幅值裕度h。

解　(1) 因为开环系统有虚极点$s=\pm\mathrm{j}2$。所以绘制开环幅相曲线时除了确定起点$G(\mathrm{j}0^+)=\infty\angle-90°$,终点$G(\mathrm{j}\infty)=0\angle-360°$外,还需确定$G(\mathrm{j}2-)=\infty\angle-153.4°$和$G(\mathrm{j}2+)=\infty\angle-333.4°$。系统开环幅相曲线如图5.10(a)示。

开环系统由4个典型环节组成,放大环节$K(20\lg K=20\ \mathrm{dB})$、积分环节($v=1$,起始段斜率为$-20\ \mathrm{dB/dec}$)、惯性环节(交接频率$\omega_1=1$)、振荡环节(交接频率$\omega_2=\omega_n=2$,$\xi=0$)。当$\omega=2$时,$|G(\mathrm{j}\omega)|\to\infty$,$\varphi(\omega)$不定,因此绘制对数频率特性曲线如图5.10(b)所示。

(2) 稳定性判断:由于$v=1$,应从幅相曲线上对应$\omega=0^+$的点起逆时针补作$\dfrac{v}{4}$个半径无穷大的圆。因为存在一对虚极点$\pm\mathrm{j}2$,故从$\omega=2^+$的对应点起,逆时针补$\dfrac{\lambda}{2}$(λ为极点$\mathrm{j}\omega_P$的重数)个半径无穷大的圆。因为$P=0$,由开环幅相曲线知$N=-1$,故闭环s右半平面的极点个数$Z=P-2N=2$,故系统

不稳定。

(3) 由对数频率特性曲线可直接读出

$$\omega_c = 2.51, \quad \omega_g = 2$$

故 $\gamma = 180° + \varphi(\omega_c) = 180° - 90° - \arctan\omega_c - 180° = -158.3°$

$$h = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = \frac{\omega_g\sqrt{\omega_g^2+1}\left(\sqrt{\frac{\omega_g^2}{4}+1}\right)^2}{10} = 0.89$$

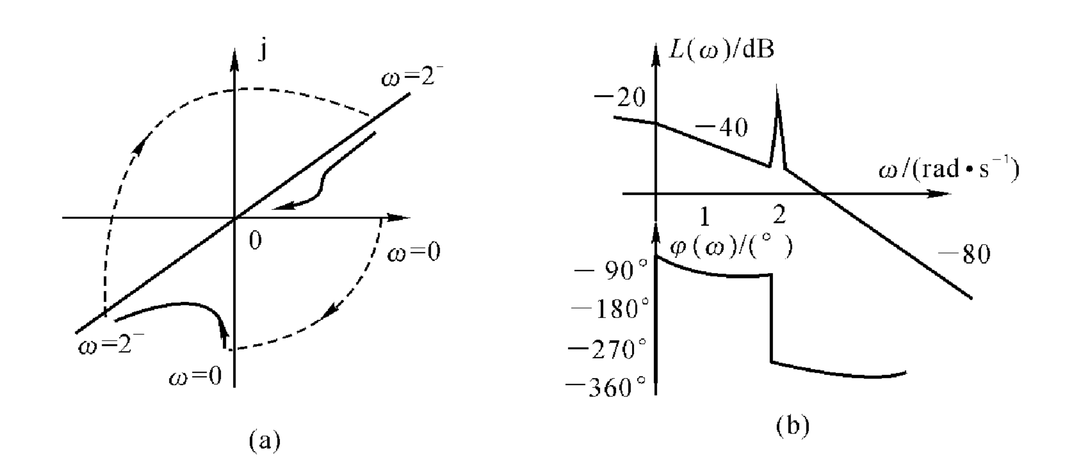


图 5.10 频率特性

【点评】 利用奈氏稳定判据判断系统稳定性时,需求幅相曲线包围$(-1,j0)$点的圈数,因而绘制的开环幅相曲线应做相应的补充。

(1) 若系统开环传递函数中有v个积分环节,则从开环幅相曲线上对应$\omega = 0^+$的点起,用虚线逆时针补画$\frac{v}{4}$个半径无穷大的圆。

(2) 若系统存在虚极点$s = j\omega_P$,且其重数为λ,则从开环幅相曲线上$G(j\omega_P^+)H(j\omega_P^+)$处起,用虚线逆时针补画$\frac{\lambda}{2}$个半径无穷大的圆。

计算包围圈数时,应考虑补画的虚圆弧。

5.10 某系统的结构图和开环幅相曲线见图 5.11,图中

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}; \quad H(s) = \frac{s^3}{(s+1)^2}$$

试判断闭环系统稳定性,并决定闭环特征方程正实部根个数。

解 由图 5.11 所示,可知内回路开环传递函数

$$G_0(s) = G(s)H(s) = \frac{s^2}{(s+1)^4}$$

$$G_0(j0) = 0\angle 0°$$

$$G_0(j0^+) = 0\angle 180°$$

$$G_0(j\infty) = 0\angle -180°$$

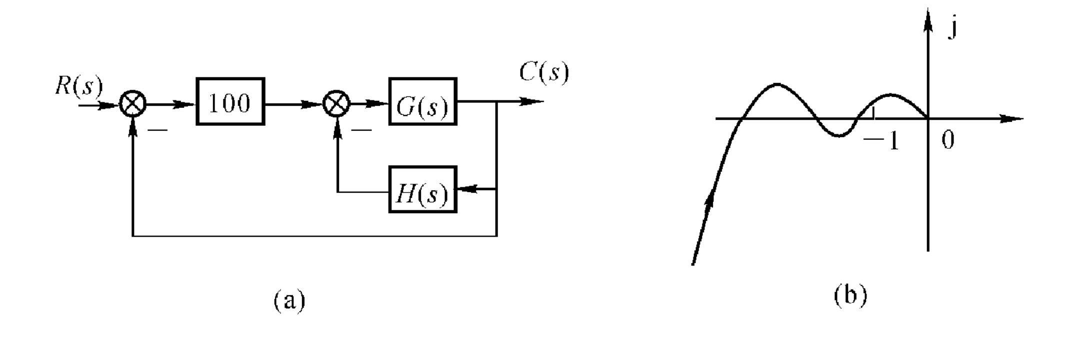


图 5.11　系统结构图和开环幅相曲线

概略绘出 $G_0(\mathrm{j}\omega)$ 的幅相曲线，如图 5.12 所示。可见内回路开环频率特性不会包围$(-1,\mathrm{j}0)$ 点，所以

$$Z_0 = P_0 - 2N_0 = 0 - 2\times 0 = 0$$

即内回路小闭环一定稳定。内回路小闭环极点就是系统的开环极点，则系统开环 s 右半平面的极点数 $P=0$。

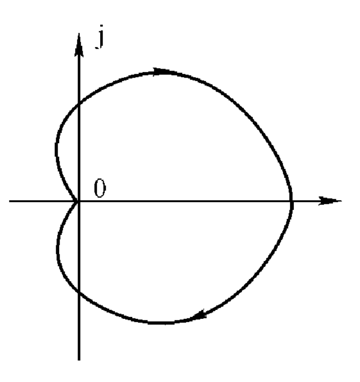


图 5.12　$G_0(\mathrm{j}\omega)$ 幅相特性

由图 5.11(b) 可知，系统开环频率特性包围$(-1,\mathrm{j}0)$ 点圈数为 $N=-1$，则

$$Z = P - 2N = 0 - 2\times(-1) = 2$$

故闭环系统不稳定，有 2 个 s 右半平面的极点。

5.11　已知系统 $G(s)=\dfrac{10}{s(s-1)}$，$H(s)=1+K_{\mathrm{h}}s$。

试确定闭环系统临界稳定时 K_{h} 的值。

解　系统开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{10(1+K_{\mathrm{h}}s)}{s(s-1)}$$

$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{10(1+K_{\mathrm{h}}\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega-1)}=$$

$$\frac{-10\omega^2(1+K_{\mathrm{h}})}{\omega^4+\omega^2}+\mathrm{j}\,\frac{\omega(1-K_{\mathrm{h}}\omega^2)}{\omega^4+\omega^2}=U(\omega)+\mathrm{j}V(\omega)$$

要使闭环系统临界稳定，则系统的幅相曲线过$(-1,\mathrm{j}0)$ 点，则有

$$U(\omega)=-1,\qquad V(\omega)=0$$

即

$$\frac{-10\omega^2(1+K_{\mathrm{h}})}{\omega^4+\omega^2}=-1,\qquad 1-K_{\mathrm{h}}\omega^2=0$$

解方程，得　$K_{\mathrm{h}}=0.1$ 或 $K_{\mathrm{h}}=-1$

故闭环系统临界稳定时　$K_{\mathrm{h}}=0.1$

5.12　系统开环频率特性曲线分别如图 5.13 的(a) 和(b) 所示,试判断闭环系统的稳定性。

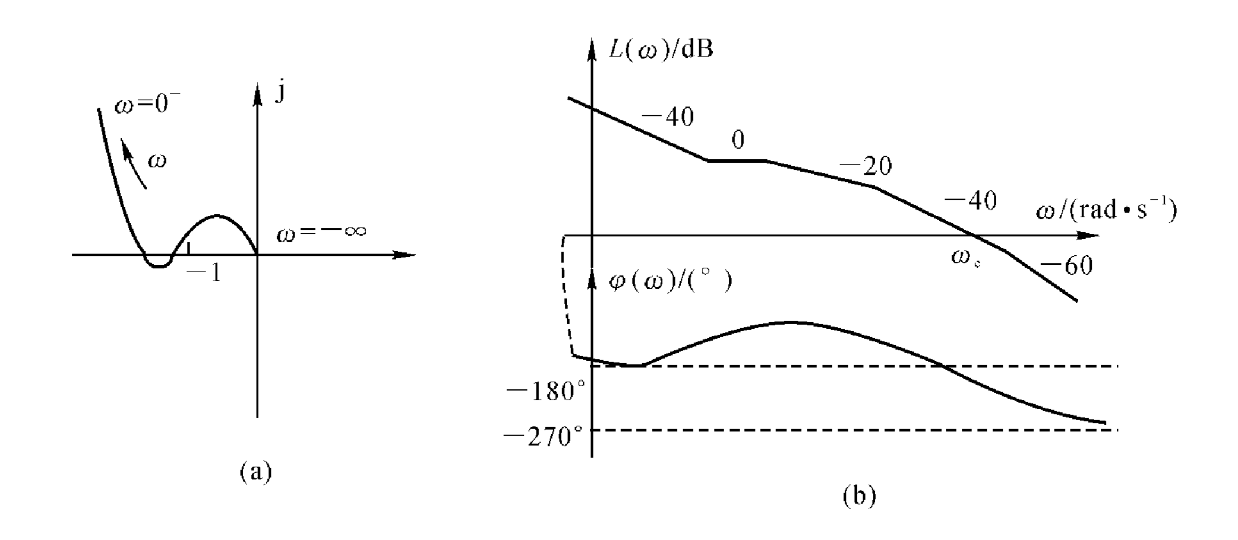


图 5.13　系统开环频率特性

解　(a) 因图 5.13(a) 中给出的幅相曲线是 $\omega \in (-\infty, 0^-)$ 范围内的,故应关于实轴对称绘出 $\omega \in (0^+, +\infty)$ 的幅相曲线(见图 5.14)。因 $v = 1$,故应从 $\omega = 0^+$ 逆时针补画 $\frac{1}{4}$ 个半径无穷大的圆。在$(-1, \mathrm{j}0)$ 点左侧,幅相曲线逆时针、顺时针各穿越负实轴一次,即 $N_+ = N_- = 1$,故 $N = N_+ - N_- = 0$,则 s 右半平面的闭环极点数

$$Z = P - 2N = 0$$

说明闭环系统稳定。

(b) 因为 $v = 2$,所以应从 0^+ 向上补 $v \times 90°$ 的垂线。见图 5.13(b) 中虚线,当 $\omega < \omega_c$ 时,$L(\omega) > 0$,在此频率范围内,$\varphi(\omega)$ 自上向下穿越 $-180°$ 线一次,因而 $N_+ = 0, N_- = 1, N = N_+ - N_- = -1$,则 s 右半平面的闭环极点数为

$$Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2$$

所以闭环系统不稳定。

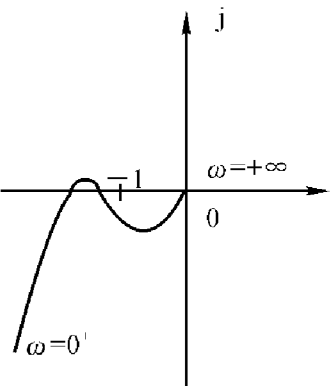


图 5.14　系统的开环幅相曲线

【点评】　可以通过确定开环幅相曲线在$(-1, \mathrm{j}0)$ 点左侧实轴上的穿越次数来获得 N。

负穿越:随 ω 增大,开环幅相曲线顺时针穿越$(-1, \mathrm{j}0)$ 点左侧的负实轴,记为一次负穿越。

正穿越:随 ω 增大,开环幅相曲线逆时针穿越$(-1, \mathrm{j}0)$ 点左侧的负实轴,记为一次正穿越。

半次穿越:开环幅相曲线起始于(或终止于)

(－1,j0) 点左侧的负实轴,则记为半次穿越。

若用 N_+ 表示正穿越次数,N_- 表示负穿越次数,则开环幅相曲线包围(－1,j0) 点的圈数

$$N = N_+ - N_-$$

而对应对数频率特性曲线的正负穿越则是:

N_+ 为 $L(\omega) > 0$ 时,$\varphi(\omega)$ 从下向上穿越$(2k+1)\times 180°$ $(k=0,\pm 1,\cdots)$ 线的次数。

N_- 为 $L(\omega) > 0$ 时,$\varphi(\omega)$ 从上向下穿越$(2k+1)\times 180°$ $(k=0,\pm 1,\cdots)$ 线的次数。

所补充的大圆弧也应视为 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线的一部分。

5.13　已知单位反馈系统的开环传递函数分别是

(1) $G(s) = \dfrac{K}{s^2(Ts+1)}$;

(2) $G(s) = \dfrac{K}{s(Ts-1)}$。

试用对数频率稳定判据判别闭环系统的稳定性。

解　(1) 首先绘制对数频率特性曲线,如图 5.15(a) 所示。

因为系统中含有两个积分环节,因而需从 $\angle G(\mathrm{j}0+)$ 补 $v\times 90°$ 角,即画一条$(-180°+2\times 90°)$ 到 $-180°$ 的虚线,见图 5.15(a)。由图中可知在 $L(\omega) > 0$ 的频带中,有一次负穿越,$N_- = 1$,$N_+ = 0$,故 $N = N_+ - N_- = -1$。因 $P = 0$,所以 $Z = P - 2N = 2$,说明闭环系统有两个 s 右半平面的极点,则此系统不稳定。

(2) 绘制系统的对数频率特曲线,如图 5.15(b) 所示。

由于系统中含有一个积分环节需从 $G(\mathrm{j}0+)$ 始补 $v\times 90°$ 角,即补画一条 $\angle G(\mathrm{j}0^+)+v\times 90°$ 到 $\angle G(\mathrm{j}0^+)$ 的虚线,见图 5.15(b)。由图中可知,在 $L(\omega) > 0$ 的频带中,有半次负穿越 $N_- = \dfrac{1}{2}$,$N_+ = 0$,因而 $N = N_+ - N_- = -\dfrac{1}{2}$。因开环传递函数在 s 右半平面有一个极点,$P = 1$,故 $Z = P - 2N = 2$,说明闭环系统有两个 s 右半平面的极点,则此系统不稳定。

5.14　已知开环系统传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)(s+1)}$$

试求:(1) $K = 1$ 时,系统的幅值裕度和相角裕度;

(2) 闭环临界稳定时的开环增益;

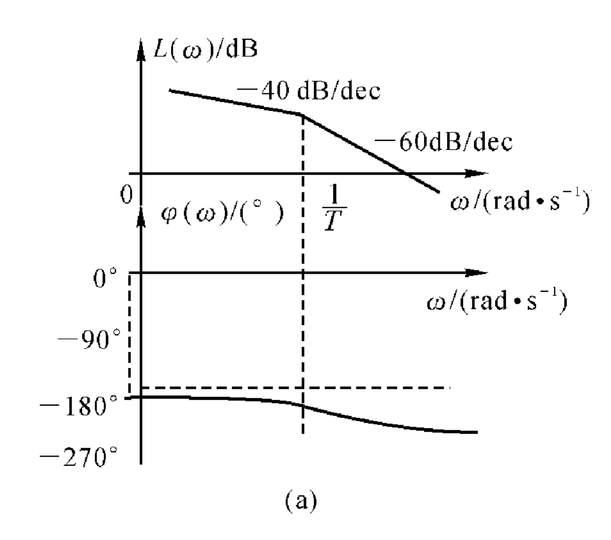
(3) 在(1) 的 K 值下,如果开环传递函数中增加一个延迟时间为 $\tau = 0.6$ s 的延迟环节,问系统是否稳定,若使系统稳定,延迟时间应不大于多少?

解　(1) 为求系统的幅值裕度和相角裕度,首先要求出系统的相角交界频率 ω_g 和截止频率 ω_c,求 ω_g 和 ω_c 的方法有多种。

解法 **1**　解析法:

首先求 ω_g:　利用关系式 $\varphi(\omega_g) = -180°$,得

$$\varphi(\omega_g) = -90° - \arctan 0.1\omega_g - \arctan 0.2\omega_g - \arctan\omega_g = -180°$$



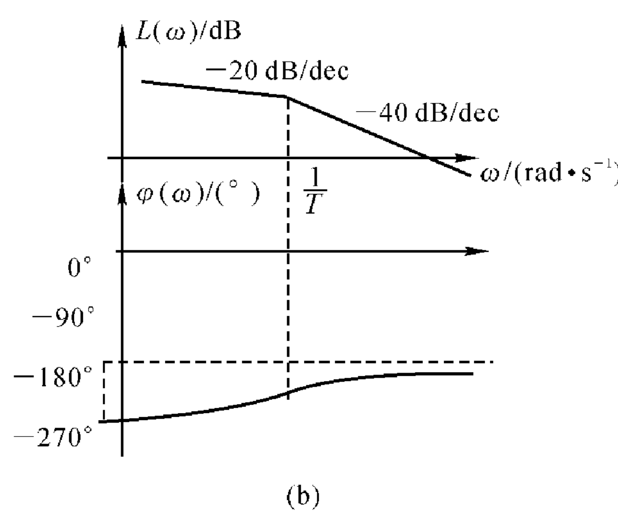


图 5.15 系统的对数频率特性曲线

运用三角公式 $\arctan\alpha \pm \arctan\beta = \arctan\dfrac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha\beta}$ 并整理，得

$$\arctan\frac{\dfrac{0.3\omega_g}{1-0.02\omega_g^2}+\omega_g}{1-\dfrac{0.3\omega_g^2}{1-0.02\omega_g^2}} = 90°$$

则

$$1-\frac{0.3\omega_g^2}{1-0.02\omega_g^2} = 0$$

故

$$\omega_g = 1.77$$

$$h_{dB} = -20\lg|G(j\omega_g)| = 20\lg\omega_g + 20\lg\sqrt{(0.1\omega_g)^2+1} + 20\lg\sqrt{(0.2\omega_g)^2+1} + 20\lg\sqrt{\omega_g^2+1} \approx 10\ \text{dB}$$

或

$$h = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = 0.32$$

求 ω_c,利用关系式 $|G(j\omega_c)|=1$,即

$$\frac{1}{\omega_c\sqrt{(0.1\omega_c)^2+1}\sqrt{(0.2\omega_c)^2+1}\sqrt{\omega_c^2+1}}=1$$

可近似计算得 $\omega_c=1$(近似计算方法见本例后说明)。

$$\gamma=180°+\varphi(\omega_c)=$$
$$180°-90°-\arctan 0.1\omega_c-\arctan 0.2\omega_c-\arctan\omega_c=$$
$$90°-5.7°-11.3°-45°=28°$$

解法 2　图解法:即根据开环系统的对数频率特性曲线确定 ω_c 和 ω_g 之后,求出相应的 γ 和 h(或 h_{dB})。首先绘制系统对数频率特性曲线如图 5.16 所示。

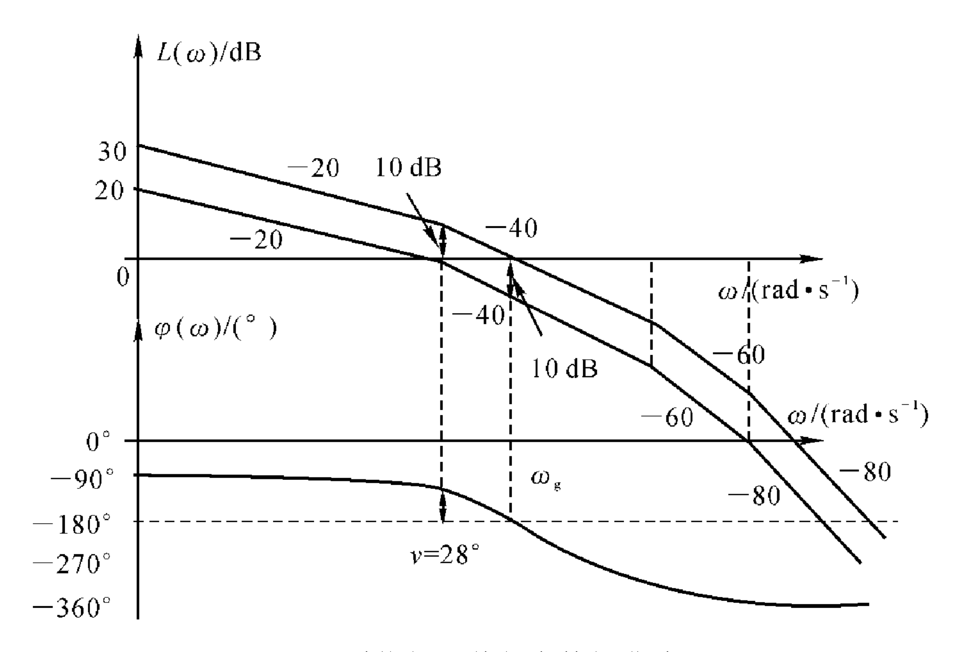


图 5.16　系统的对数频率特性曲线

从对数频率特性曲线中可以直接读出 $\omega_c=1$,$\omega_g=1.77$(同解析法答案),因而可求出 h 和 γ。

(2) 闭环临界稳定时,$h=1$(或 $h_{dB}=0$),$\gamma=0$。应用此两个条件即可求出临界稳定时的 K 值。

解析法:　$\gamma=0$ 说明临界稳定时 $\varphi(\omega_c)=-180°$,即 $\omega_g=\omega_c$。因为

$$\begin{cases} h_{dB}=-20\lg K+20\lg\omega_c+20\lg\sqrt{(0.1\omega_c)^2+1}+ \\ \qquad 20\lg\sqrt{(0.2\omega_c)^2+1}+20\lg\sqrt{\omega_c^2+1}=0 \\ \gamma=180°-90°-\arctan 0.1\omega_c- \\ \qquad \arctan 0.2\omega_c-\arctan\omega_c=0 \end{cases}$$

解方程求得　$\omega_c=1.77$,　$K=3.2$

图解法:将对数幅频特性曲线 $L(\omega)$ 上移,使得

$$h(\mathrm{dB})(\omega_g) = 0,\ \gamma = 0$$

则有
$$20\lg K = 10\ \mathrm{dB}$$

故
$$K = 3.2$$

(3) 当 $K = 1$ 时,如果开环传递函数中增加一个延迟时间为 $\tau = 0.6$ s 的延迟环节,则系统的对数幅频特性曲线不变,即不改变截止频率 ω_c,而相频特性增加$-57.3\omega\tau^\circ$。

当 $\tau = 0.6$ s 时,相频特性增加的相位为 $-57.3\times 0.6\omega^\circ$,则在 $\omega_c = 1$ 处增加 $-57.3\times 0.6\times 1^\circ = -34.4^\circ$ 的相位。增加的相位绝对值大于原系统的相角裕度($\gamma = 28^\circ$),因此系统此时的稳定裕度 $\gamma = -34.4^\circ + 28^\circ = -6.4^\circ < 0$,故系统变得不稳定。

要使系统稳定,在 $\omega_c = 1$ 处产生的相角滞后不应超过 28°,即临界延迟时间 τ_e 应满足

$$57.3\times 1\times \tau_e = 28$$

故
$$\tau_e = 0.5\ \mathrm{s}$$

因此,使系统稳定的延迟时间应小于 0.5 s。

【点评】 求解系统相角裕度 γ 和幅值裕度 h(或 h_{dB})的关键在于求开环系统的截止频率 ω_c 和相角交界频率 ω_g,总结 ω_g 和 ω_c 的求解方法如下:

(1) 求相角交接频率 ω_g,3 种解法。

解析法 1 对应频率 ω_g,系统相频特性 $\varphi(\omega_g) = -180^\circ$,因而可利用关系式 $\varphi(\omega_g) = -180^\circ$ 和三角公式 $\arctan\alpha \pm \arctan\beta = \arctan\dfrac{\alpha\pm\beta}{1\mp\alpha\beta}$ 求出 ω_g。

解析法 2 对应频率 ω_g,系统相频特性 $\varphi(\omega_g) = -180^\circ$,说明 $G(\mathrm{j}\omega) = U(\omega) + \mathrm{j}V(\omega)$ 中的 $V(\omega) = 0$,则利用关系式 $V(\omega) = 0$ 可求出 ω_g。

图解法:绘制系统的对数频率特性曲线,对数相频特性 $\varphi(\omega)$ 与 -180° 线交点对应的频率为 ω_g。

(2) 求截止频率 ω_c。

图解法:绘制开环系统的对数幅频特性 $L(\omega)$,$L(\omega)$ 与零分贝线交点对应的频率即是所求的截止频率 ω_c。

解析法:对应截止频率 ω_c,系统幅频特性 $|G(\mathrm{j}\omega_c)| = 1$,即可利用 $|G(\mathrm{j}\omega_c)| = 1$ 求出截止频率 ω_c。但这种直接计算方法十分麻烦,往往要解高阶方程,因而一般可采用近似方法求解。以交接频率划分频段范围,若 $G(\mathrm{j}\omega) = \Pi G_i(\mathrm{j}\omega)$,按下式近似处理环节的幅频特性

$$|G_i(\mathrm{j}\omega)| = \left|\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_i} + 1\right| \approx \begin{cases} 1 & \omega \leqslant \omega_i \\ \dfrac{\omega}{\omega_i} & \omega > \omega_i \end{cases}$$

写出不同频段范围内开环幅频特性的近似表达式,计算满足 $|G(\mathrm{j}\omega)| = 1$ 的 ω。若计算所得 ω 位于相应的频段范围,则此 ω 即为所求的 ω_c。这种近似求解截止频率 ω_c 的方法与图解法求出的 ω_c 相同。

5.15　单位反馈的最小相角系统，其闭环对数幅频特性如图 5.17 所示，要求系统具有 30° 的相角裕度，试计算开环增益应增大的倍数。

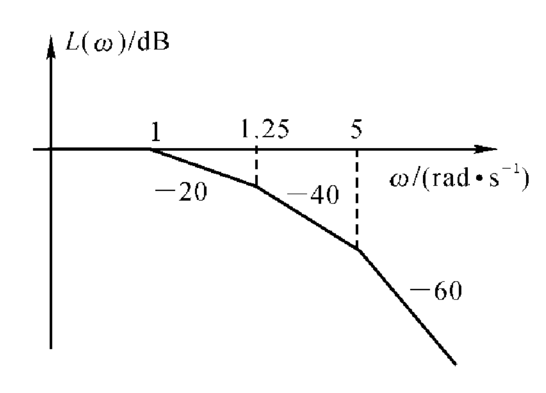


图 5.17　闭环对数幅频曲线

解　由闭环对数幅频特性曲线可得系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{1}{(s+1)\left(\frac{1}{1.25}s+1\right)\left(\frac{1}{5}s+1\right)}=$$

$$\frac{6.25}{(s+1)(s+1.25)(s+5)}$$

因此系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)}=\frac{6.25}{s(s+2.825)(s+4.425)}=$$

$$\frac{0.5}{s\left(\frac{s}{2.825}+1\right)\left(\frac{s}{4.425}+1\right)}$$

相角裕度　$\gamma=180^\circ+\varphi(\omega_c)=180^\circ-90^\circ-\arctan\frac{\omega_c}{2.825}-\arctan\frac{\omega_c}{4.425}$

要求　$\gamma=30^\circ$

因而可解得　$\omega_c=2.015$

设开环增益需增大 Ka 倍，则不同频段，开环对数幅频特性为

$$L(\omega)=\begin{cases}20\lg\frac{0.5Ka}{\omega} & \omega<2.825\\ 20\lg\frac{0.5Ka}{\omega\left(\frac{\omega}{2.825}\right)} & 2.825<\omega<4.425\\ 20\lg\frac{0.5Ka}{\omega\left(\frac{\omega}{2.825}\right)\left(\frac{\omega}{4.425}\right)} & 4.425<\omega\end{cases}$$

因为　$\omega_c<2.825$

则
$$L(\omega_c)=20\lg\frac{0.5Ka}{\omega_c}=0$$
故
$$Ka=4.03$$
因此,系统的开环增益需增大 4.03 倍方可使系统具有 30° 的相角裕度。

5.16 某最小相角系统的开环对数幅频特性如图 5.18 所示,要求:

(1) 写出系统的开环传递函数;

(2) 利用相位裕量判断系统稳定性;

(3) 将其对数幅频特性向右平移十倍频程,试讨论对系统性能的影响。

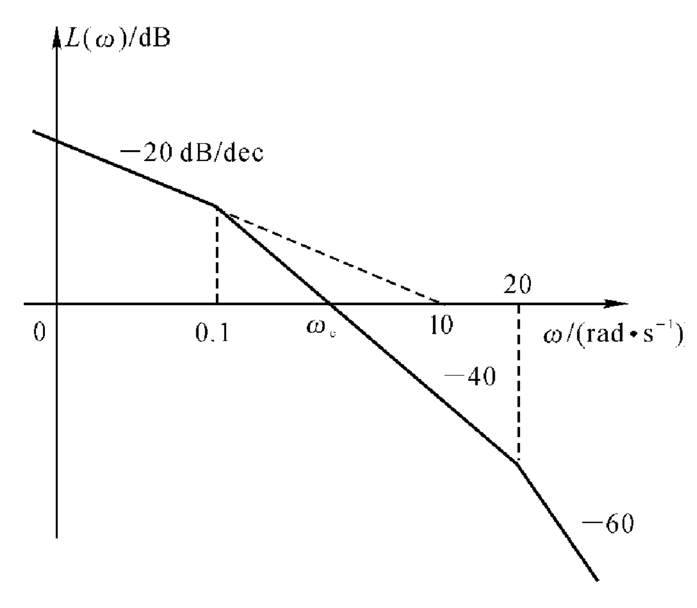


图 5.18 系统对数幅频特性图

解 (1) 由系统开环对数幅频特性知,低频段斜率为 −20 dB/dec,说明开环传递函数中有一个积分环节 $v=1$,又最左端直线与 0 分贝线交点对应频率 $\omega_0=10$,则 $K=\omega_0^v=10$。又知系统存在两个交接频率 $\omega_1=0.1$,$\omega_2=20$,故系统的开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{10}{s\left(\frac{1}{0.1}s+1\right)\left(\frac{1}{20}s+1\right)}$$

(2) 各频段系统的幅频特性为

$$|G(j\omega)|=\begin{cases}\dfrac{10}{\omega} & \omega<0.1\\[2ex] \dfrac{10}{\omega\left(\dfrac{1}{0.1}\omega\right)} & 0.1\leqslant\omega<20\\[2ex] \dfrac{10}{\omega\left(\dfrac{\omega}{0.1}\right)\left(\dfrac{\omega}{20}\right)} & \omega>20\end{cases}$$

从而解得
$$\omega_c = 1\ \text{rad/s}$$
则　$\gamma = 180° + \varphi(\omega_c) =$
$$180° - 90° - \arctan\frac{\omega_c}{0.1} - \arctan\frac{\omega_c}{20} = 2.85° > 0$$

因为是最小相角系统，故当 $\gamma > 0$ 时系统稳定。

(3) 将老系统开环对数幅频特性向右平移十倍频程，可得新系统的开环传递函数
$$G_1(s)H_1(s) = \frac{100}{s(s+1)\left(\frac{1}{200}s+1\right)}$$
其截止频率
$$\omega_{c1} = 10\omega_c = 10\ \text{rad/s}$$
而
$$\varphi_{G_1H_1}(\omega_{c1}) = -90° - \arctan\omega_{c1} - \arctan\frac{\omega_c}{200} = -177.15°$$
$$\gamma_1 = 180° + \varphi_{G_1H_1}(\omega_{c1}) = 2.85° = \gamma$$
系统的稳定程度不变。

由时域指标估计公式 $t_s = K\pi/\omega_c$，得
$$t_{s1} = 0.1t_s$$
即新系统调节时间短，动态响应快。

由
$$\sigma = 0.16 + 0.4\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right)$$
得
$$\sigma_1 = \sigma$$
即新系统的超调量不变。

5.17　已知系统结构图如图 5.19 所示，试用相角裕度确定 K_h 的临界值。

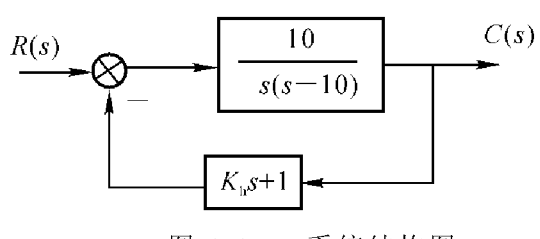


图 5.19　系统结构图

解　首先，当 $K_h = 0$ 时，系统开环传递函数为
$$G_1(s)H_1(s) = \frac{10}{s(s-10)} = \frac{1}{s(0.1s-1)}$$
此时系统的开环对数频率特性曲线见图 5.20 中特性 1，其截止频率为 $\omega_{c1} = 1$，相角裕度 $\gamma_1 < 0$，闭环系统不稳定。

当 $H(s) = K_hS + 1$ 时，系统开环传递函数为
$$G(s)H(s) = \frac{10(K_hs+1)}{s(s-10)} = \frac{K_hs+1}{s(0.1s-1)}$$

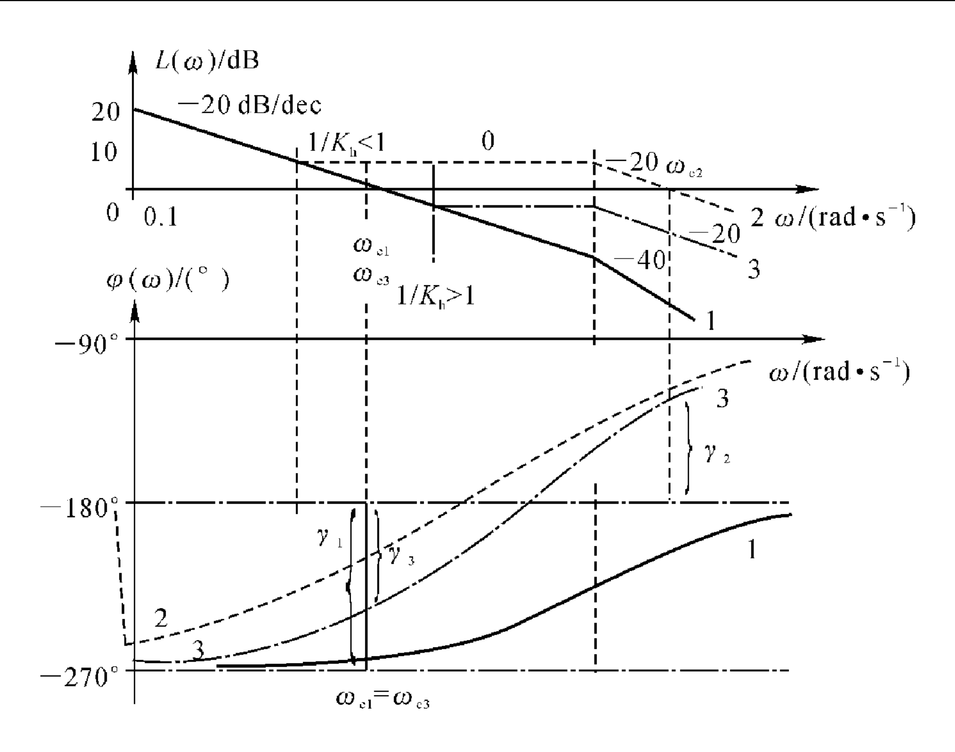


图 5.20　对数频率特性

其对数频率特性曲线与 K_h 的取值有关。分两种情况讨论：

第一种情况，$K_h > 1$，一阶微分环节的交接频率为 $\dfrac{1}{K_h} < 1$，其对数频率特性曲线见图 5.20 中特性 2，ω_c 右移到 ω_{c2}，$\gamma_2 > 0$，所以闭环系统稳定。

第二种情况，$K_h < 1$，此时一阶微分环节的交接频率为 $\dfrac{1}{K_h} > 1$，对数频率特性曲线见图 5.20 中特性 3，截止频率 $\omega_{c3} = \omega_{c1} = 1$，而 $\gamma_3 < 0$，所以闭环系统不稳定。

故 K_h 的临界值为 1。可用劳斯稳定判据验证如下：

系统的闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{10}{s^2 + (10K_h - 10)s + 10}$$

特征式为

$$D(s) = s^2 + (10K_h - 10)s + 10 = 0$$

二阶系统只要 s 的各阶系数为正系统就稳定，因而使系统稳定的 K_h 的临界值就是

$$10K_h - 10 = 0$$

故

$$K_h = 1$$

【点评】　频率法中，奈奎斯特稳定判据是判断系统稳定性的通用方法。对于最小相位系统来说，相角裕度 $\gamma > 0$ 系统一定稳定，$\gamma < 0$ 系统不稳定。而对于非最小相位系统来说，不能仅从相角裕度是否大，于零判断系统的稳定性，必须用奈氏判据校核。

5.18　某系统的闭环幅频特性曲线如图 5.21 所示，试估计时域性能指标

$\sigma\%$ 及 t_s。

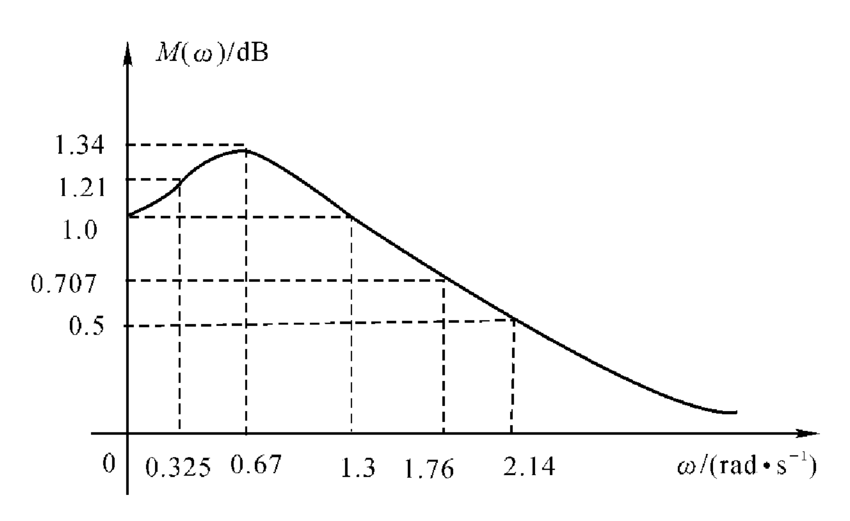


图 5.21　闭环幅频特性曲线

解　由图 5.21 查出

$$M(0)=1,\quad M_r=1.34,$$
$$\omega_b=1.76,\quad \omega_{0.5}=2.14,\quad \omega_1=1.3,$$
$$M(\omega_1/4)=1.21$$

得
$$\sigma\%=\left\{41\times\ln\left(\frac{1.34\times1.21}{1^2}\right)\times\frac{1.76}{2.14}+17\right)\%=28.7\%$$

$$t_s=\left(\frac{13.57\times1.34\times1.76}{1.0\times2.14}-2.51\right)\times\frac{1}{2.14}=5.8\ \mathrm{s}$$

5.19　已知 3 个最小相角系统 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,其开环对数幅频特性如图 5.22(a) 所示。

(1) 定性比较这 3 个系统对单位阶跃输入响应的调节时间和超调量;

(2) 计算并比较这 3 个系统对斜坡输入的稳态误差;

(3) 分析和比较系统 Ⅰ 和 Ⅱ 的相角裕度。

解　(1) 令 ω_{c1},ω_{c2} 和 ω_{c3} 分别是系统 Ⅰ,Ⅱ 和 Ⅲ 的截止频率,由图 5.14(a),可知,$\omega_{c1}>\omega_{c2}>\omega_{c3}$。

因为系统对单位阶跃输入响应的调节时间和超调量为

$$\begin{cases} t_s=\dfrac{\pi}{\omega_c}\left[2+1.5\left(\dfrac{1}{\sin\gamma}-1\right)+2.5\left(\dfrac{1}{\sin\gamma}-1\right)^2\right] \\ \sigma\%=0.16+0.4\left(\dfrac{1}{\sin\gamma}-1\right) \end{cases}$$

均与相角裕度有关。为求各系统的相角裕度,可绘制各系统的对数相频特性如图 5.22(b)。系统 Ⅰ,Ⅱ 的对数相频特性相同,可知 $\gamma_1>\gamma_2>\gamma_3$(为负)。由于系统 Ⅲ 的相角裕度 $\gamma_3<0$,故系统 Ⅲ 不稳定,因而不需再分析它的动态特性和稳态特性。因此可知

$$t_{s1} < t_{s2}$$

$$\sigma_1\% < \sigma_2\%$$

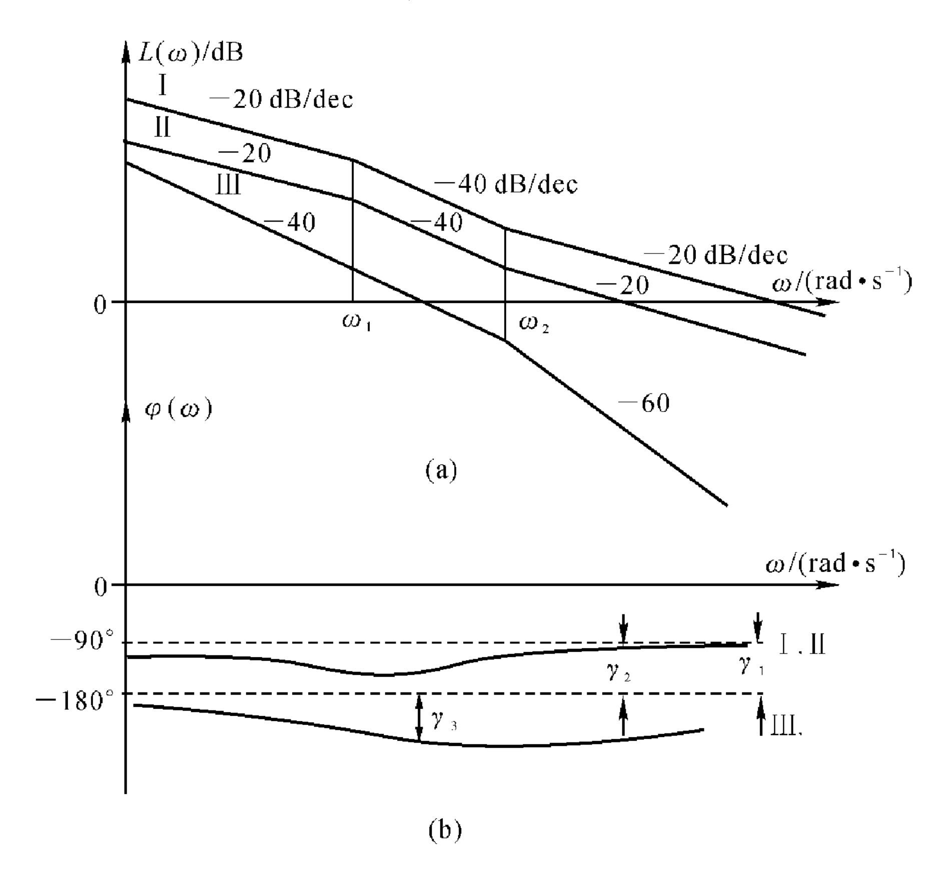


图 5.22 系统对数频率特性

（2）由 3 个系统低频段的对数幅频特性可知，系统 Ⅰ，Ⅱ 为一型系统，且系统 Ⅰ 的开环增益 K_1 大于系统 Ⅱ 的开环增益 K_2，即 $K_1 > K_2$，由静态误差系数法可知，当输入斜坡信号 $r(t) = Rt$ 时

$$e_{ss1} = \frac{R}{K_1} < e_{ss2} = \frac{R}{K_2}$$

故
$$e_{ss1} < e_{ss2}$$

（3）相角裕度
$$\gamma_1 > \gamma_2$$

5.20 已知最小相位系统的开环对数幅频特性渐近线如图 5.23 所示，ω_c 位于两个交接频率的几何中心。

（1）估计系统的稳态精度；

（2）计算 $\sigma\%$ 和 t_s。

解 （1）由系统对数幅频特性写出系统的开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(0.2s+1)}$$

其中 K 待定。由已知 ω_c 位于两个交接频率的几何中心，得

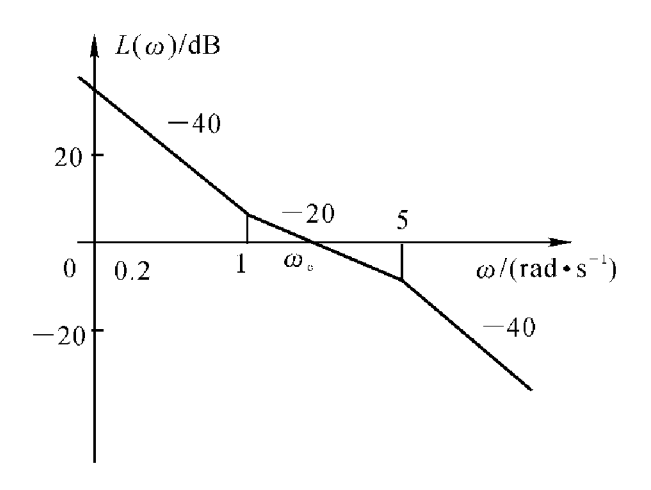


图 5.23　对数幅频特性

$$\omega_c = \sqrt{1 \times 5} = 2.236$$

因为 $\omega = 1$ 处的 $L(\omega) = 20\lg K$，而本例中点$(1, 20\lg K)$又在 -20 dB/dec 直线上，则有

$$20\lg K - 0 = -20(\lg 1 - \lg \omega_c)$$

故有

$$K = \omega_c = 2.236$$

从低频段 $L(\omega)$ 的斜率可知 $v = 2$，即系统是 Ⅱ 型系统，则系统的静态位置，速度和加速度误差系数分别为

$$K_p = \infty, K_v = \infty, K_a = K = 2.236$$

因而，系统对单位加速度信号响应的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K} = \frac{1}{2.236} = 0.447$$

(2) 估算 $\sigma\%$ 和 t_s，还需求解系统的相角裕度 γ。

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) =$$

$$180^\circ - 180^\circ + \arctan\omega_c - \arctan(0.2\omega_c) = 41.81^\circ$$

因而

$$\sigma\% = 0.16 + 0.4\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right) = 0.16 + 0.4\left(\frac{1}{\sin 41.81^\circ} - 1\right) = 0.36$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c}\left[2 + 1.5\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right) + 2.5\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right)^2\right] = 4.74 \text{ s}$$

第六章

线性系统的校正方法

6.1　设火炮指挥系统结构如图6.1所示，$G(s)=\dfrac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$系统最大输出速度为2 r/min，输出位置的容许误差小于2°，求：

(1) 确定满足上述指标的最小K值，计算该K值下的相角裕量和幅值裕量；

(2) 前向通路中串联超前校正网络$G_c(s)=\dfrac{0.4s+1}{0.08s+1}$，试计算相位裕量。

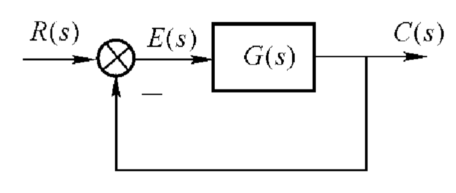


图6.1　火炮指挥系统结构图

解　(1) 系统为 Ⅰ 型系统

$$e_{ss}\xlongequal{r(t)=At}\frac{A}{K}$$

$$K=\frac{A}{e_{ss}}=\frac{2\times 360^\circ/60}{2^\circ}=6\ 1/\mathrm{s}$$

故　$$G(s)=\frac{6}{s\left(\dfrac{s}{2}+1\right)\left(\dfrac{s}{5}+1\right)}$$

$$|G(\mathrm{j}\omega)|=\begin{cases}\dfrac{6}{\omega} & \omega<2\\[2ex] \dfrac{6}{\omega\cdot\dfrac{\omega}{2}} & 2\leqslant\omega<5\\[2ex] \dfrac{6}{\omega\cdot\dfrac{\omega}{2}\cdot\dfrac{\omega}{5}} & \omega\geqslant 5\end{cases}$$

令　$$|G(\mathrm{j}\omega)|=1$$

可得　$$\omega_c=3.5\text{（参见参考文献6）}$$

$$\gamma=180^\circ+\underline{/G(\mathrm{j}\omega_c)}=$$

$$180^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{3.5}{2} - \arctan\frac{3.5}{5} = -4.9^\circ < 0^\circ$$

令 $\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)] = 0$，得

$$\omega_g = \sqrt{10}$$

$$h = \frac{1}{|G(\mathrm{j}\omega_g)|} = 0.86 < 1$$

所以系统不稳定。

(2) 加入串联超前校正网络后，开环传递函数

$$G(s) = \frac{6}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{5}+1\right)} \frac{\frac{s}{2.5}+1}{\frac{2}{12.5}+1}$$

$$|G(\mathrm{j}\omega)| = \begin{cases} \dfrac{6}{\omega} & \omega < 2 \\ \dfrac{6}{\omega \cdot \frac{\omega}{2}} & 2 \leqslant \omega < 2.5 \\ \dfrac{6 \cdot \frac{\omega}{2.5}}{\omega \cdot \frac{\omega}{2}} & 2.5 \leqslant \omega < 5 \\ \dfrac{6 \cdot \frac{\omega}{2.5}}{\omega \cdot \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\omega}{5}} & 5 \leqslant \omega < 12.5 \\ \dfrac{6 \cdot \frac{\omega}{2.5}}{\omega \cdot \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\omega}{5} \cdot \frac{\omega}{12.5}} & \omega \geqslant 12.5 \end{cases}$$

令 $|G(\mathrm{j}\omega)| = 1$，得

$$\omega_c = 4.8$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(\mathrm{j}\omega_c) =$$

$$180^\circ + \arctan\frac{4.8}{2.5} - 90^\circ - \arctan\frac{4.8}{2} - \arctan\frac{4.8}{5} - \arctan\frac{4.8}{12.5} =$$

$$20.2^\circ > 0$$

可见串入超前校正网络后，γ 增大，系统变为稳定。

6.2　已知单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.01s+1)}$$

单位斜坡输入 $r(t) = t$，稳态误差 $e_{ss} \leqslant 0.0625$。若使校正后相位裕量 γ^* 不低

于 45°,截止频率 $\omega_c^* > 2$ rad/s,试设计校正系统。

解 (1) 确定开环增益 K。

$$e_{ss} \xlongequal{r(t)=t} \frac{A}{K} = \frac{1}{K} \leqslant 0.0625$$

$$K \geqslant 16$$

取 $K=16$ 作出未校正系统对数幅频特性和对数相频特如图 6.2 中 L,φ 所示。

(2) 计算未校正系统截止频率 ω_c 及相角裕度 γ。

$$G(s) = \frac{16}{s(s+1)(0.01s+1)} = \frac{16}{s(s+1)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} \frac{16}{\omega} & \omega < 1 \\ \frac{16}{\omega \cdot \omega} & 1 \leqslant \omega < 100 \\ \frac{16}{\omega \cdot \omega \cdot \frac{\omega}{100}} & \omega \geqslant 100 \end{cases}$$

令 $|G(j\omega)| = 1$,得 $\omega_c = 4$ (截止频率 ω_c 也可从 Bode 图中读出)。

$\gamma = 180° + \underline{/G(j\omega_c)} =$

$$180° - 90° - \arctan 4 - \arctan\frac{4}{100} = 12° < 45°$$

未校正系统的截止频率大于系统要求的截止频率,而相位裕量不满足要求,需要加以校正。由于原系统中频段以斜率 -40 dB/dec 穿越 0 dB 线,可选用超前网络校正。

(3) 确定校正装置参数。

串联超前校正装置的最大超前角为

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma + (5° \sim 10°) = 45° - 12° + 10° = 43°$$

选择 5° ~ 10° 相角修正量是因为校正后 $\omega'_c > \omega_c$,因而 $\gamma(\omega'_c) < \gamma(\omega_c)$,故需补偿。

由于

$$\varphi_m = \sin^{-1}\frac{a-1}{a+1}$$

$$a = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = \frac{1+\text{sim}43°}{1-\sin 43°} = 5$$

$$10\lg a = 7$$

在未校正系统的 Bode 图上寻找对数幅频特性 $L=-7$ dB 对应的 ω 值,即选为校正后系统截止频率 ω'_c,由图 6.2 有

$$-40(\lg\omega'_c - \lg\omega_c) = -7$$

$$\omega'_c = \omega_c 10^{\frac{7}{40}} = 6 \text{ rad/s} = \omega_m$$

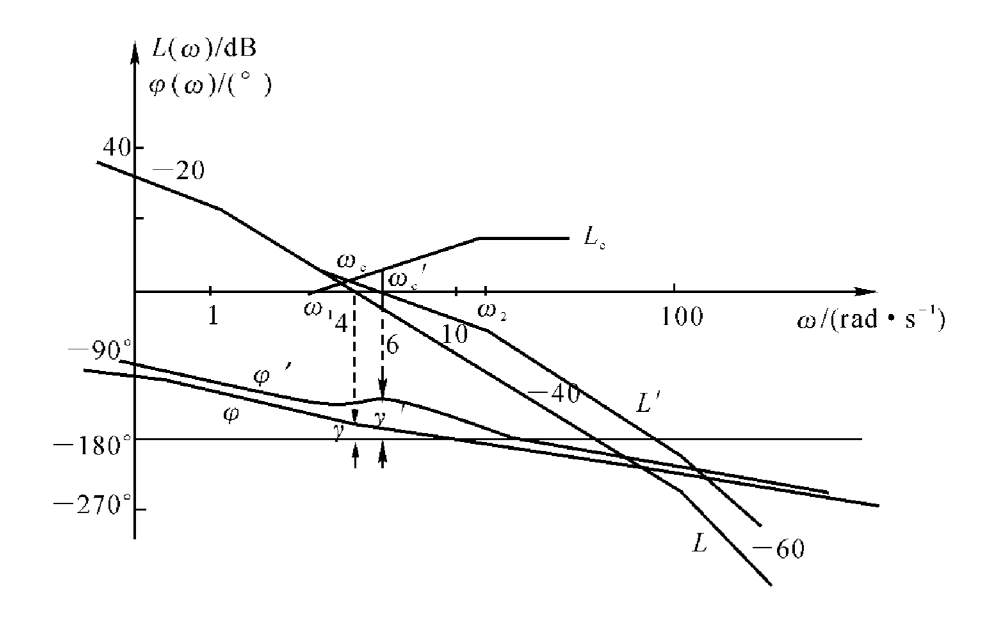


图 6.2　例 6.2Bode 图

超前校正装置的转折频率为

$$\omega_1 = \frac{1}{aT} = \frac{\omega_m}{\sqrt{a}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = 2.68$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T} = \sqrt{a}\omega_m = 6\sqrt{5} = 13.43$$

超前校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{aTs+1}{Ts+1} = \frac{\frac{s}{2.68}+1}{\frac{s}{13.43}+1} = \frac{0.37s+1}{0.074s+1}$$

校正装置对数频率特性如图 6.2 中 L_c 所示。

(4) 验算校正后系统的性能指标。

校正后系统的开环传递函数为

$$G'(s) = G(s)G_c(s) = \frac{16(0.37s+1)}{s(s+1)(0.074s+1)(0.01s+1)}$$

$$e_{ss} \xlongequal{r(t)=t} \frac{A}{K} = \frac{1}{16} = 0.062\,5$$

$$\omega'_c = 6 > \omega_c^* = 2$$

$$\gamma' = 180° + \underline{/G'(j\omega'_c)} =$$

$$180° + \arctan\frac{6}{2.68} - 90° - \arctan 6 - \arctan\frac{6}{13.43} - \arctan\frac{6}{100} =$$

$$180° + 65.93° - 90° - 80.54 - 24.07° - 3.43° =$$

$$48° > \gamma^* = 45°$$

满足要求。

校正后系统的对数幅频特性和对数相频特性如图 6.2 中 L' 和 φ' 所示。

6.3　单位反馈系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{10}{s(0.05s+1)(0.25s+1)}$$

试设计串联超前校正装置，使系统的谐振峰值 $M_r^*\leqslant 1.4$，截止频率 $\omega_c^*\geqslant 10$。

解　(1) 求未校正系统性能参数。

$$G(s)=\frac{10}{s(0.05s+1)(0.25s+1)}=\frac{10}{s\left(\frac{s}{4}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

$$M_r=\frac{1}{\sin\gamma}$$

由于

$$M_r^*\leqslant 1.4$$

$$\gamma^*\geqslant \arcsin\frac{1}{1.4}=45.6^\circ$$

$$|G(j\omega)|=\begin{cases}\dfrac{10}{\omega} & \omega<4\\[2ex] \dfrac{10}{\omega\cdot\dfrac{\omega}{4}} & 4\leqslant\omega<20\\[2ex] \dfrac{10}{\omega\cdot\dfrac{\omega}{4}\cdot\dfrac{\omega}{20}} & \omega\geqslant 20\end{cases}$$

得未校正系统截止频率

$$\omega_c=\sqrt{40}=6.32<\omega_c^*$$

$$\gamma=180^\circ+\underline{/G(j\omega_c)}=180^\circ-90^\circ-\arctan\frac{6.32}{4}-\arctan\frac{6.32}{20}=$$

$$90^\circ-57.67^\circ-17.54^\circ=14.8^\circ<\gamma^*=45.6^\circ$$

画出原系统的 Bode，如图 6.3 中 L 和 φ 所示。

(2) 计算超前装置提供的最大超前角。

$$\varphi_m=\gamma^*-\gamma+5^\circ\sim 10^\circ=45.6^\circ-14.8^\circ+9.2^\circ=40^\circ$$

$$a=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}=4.6$$

$$10\lg a=6.63$$

则

$$\omega_m=\omega_c 10^{\frac{6.63}{40}}=9.26$$

若取 $\omega'_c=9.26$ 显然不能满足要求，故取

$$\omega'_c=10.5>10=\omega_c^*$$

(3) 作图设计。

过点 A(对应频率为 ω'_c) 作垂直于 0 dB 线的直线，与 L 交于 B 点，取

$BA = AC$，过 C 点作斜率为 $+20$ dB/dec 直线与 0dB 线交于 D 点，对应频率为 ω_1，取 $DC = CE$，E 点对应频率为 ω_2，过 E 点作平行于 0 dB 线。

由于
$$20(\lg\omega'_c - \lg\omega_1) = 40(\lg\omega'_c - \lg\omega_c)$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_c^2}{\omega'_c} = \frac{40}{10.5} = 3.8$$

由于
$$\omega'_c = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$

$$\omega_2 = \frac{(\omega'_c)^2}{\omega_1} = \frac{10.5^2}{3.8} = 29$$

校正装置传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\dfrac{s}{3.8}+1}{\dfrac{s}{29}+1}$$

作出校正装置对数幅频特性，如图 6.3 中 L_c 所示。

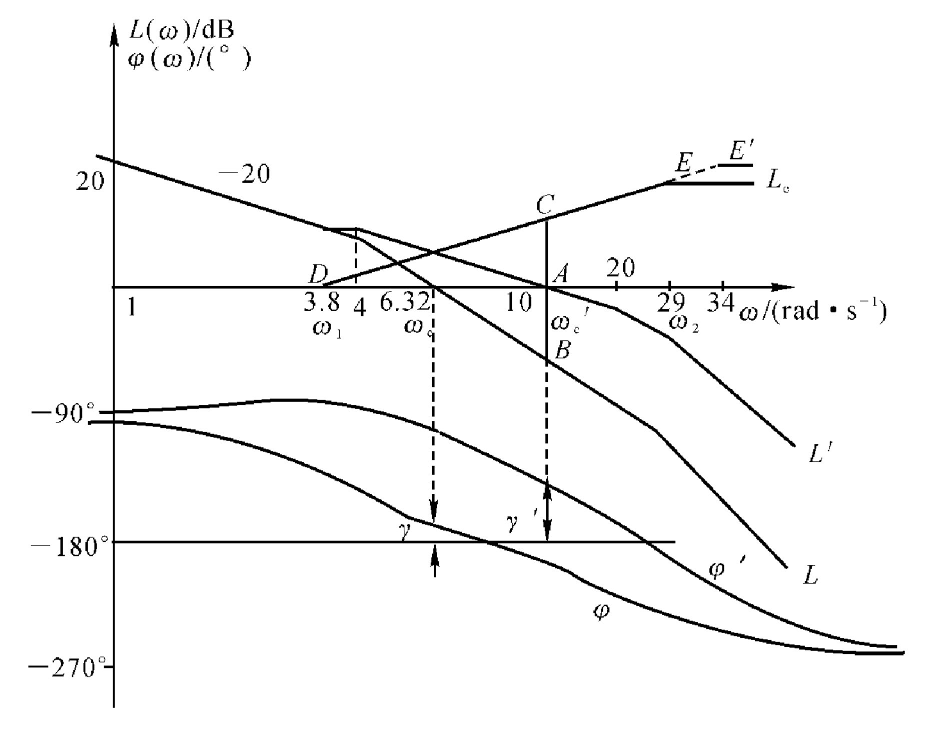


图 6.3　例 6.3Bode 图

(4) 验算。

校正后系统开环传递函数

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{10\left(\dfrac{s}{3.8}+1\right)}{s\left(\dfrac{s}{4}+1\right)\left(\dfrac{s}{20}+1\right)\left(\dfrac{s}{29}+1\right)}$$

校正后系统 Bode 如图 6.3 中 L' 和 φ' 所示。

$\gamma' = 180° + \angle G'(j\omega'_c) =$

$$180° + \arctan\frac{10.5}{3.8} - 90° - \arctan\frac{10.5}{4} -$$

$$\arctan\frac{10.5}{20} - \arctan\frac{10.5}{29} =$$

$$180° - 90° + 70.1° - 69.2° - 27.7° - 19.9° =$$

$$43.3° < 45.6°$$

将校正装置对数幅频曲线中 E 点稍向右移至 E'，取 $\omega_2 = 34$

$$\gamma' = 180° + 180° + \arctan\frac{10.5}{3.8} - 90° -$$

$$\arctan\frac{10.5}{4} - \arctan\frac{10.5}{20} - \arctan\frac{10.5}{34} =$$

$$180° - 90° + 70.1° - 69.2° - 27.7° - 17.4° =$$

$$45.8° > 45.6°$$

满足要求。

校正后系统开环传递正数

$$G'(s) = \frac{10\left(\frac{s}{3.8} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{4} + 1\right)\left(\frac{s}{20} + 1\right)\left(\frac{s}{34} + 1\right)}$$

6.4 已知单位反馈系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(0.05s + 1)(0.2s + 1)}$$

设计串联超前校正装置，使系统的 $K_v \geqslant 5$，超调量不大于 30%，调节时间不大于 1 s。

解 (1) 将时域性能指标换算成频域性能指标。由公式

$$\sigma = 0.16 + 0.41(M_r - 1) \leqslant 0.3$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c}[2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2] \leqslant 1$$

解得

$$M_r = \frac{1}{\sin\gamma} \leqslant 1.34$$

$$\gamma \geqslant \arcsin\frac{1}{1.34} = 48.3°$$

若取 $M_r^* = 1.34$，则 $\gamma^* = 48.3°$。

$$\omega_c^* \geqslant \pi[2 + 1.5 \times (1.34 - 1) + 2.5(1.34 - 1)^2] = 8.79 \text{ rad/s}$$

(2) 计算原系统性能指标，看是否满足要求。

$$G(s) = \frac{K}{s(0.05s + 1)(0.2s + 1)} = \frac{K}{s\left(\frac{s}{5} + 1\right)\left(\frac{s}{20} + 1\right)}$$

$$K_V = \lim_{s \to 0} sG(s) = K \geqslant 5$$

取

$$K = 5$$

$$G(s) = \frac{5}{s\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

原系统 Bode 图如图 6.4 中 L 和 φ 所示。

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} \dfrac{5}{\omega} & \omega < 5 \\ \dfrac{5}{\omega \cdot \dfrac{\omega}{5}} & 5 \leqslant \omega < 20 \\ \dfrac{5}{\omega \cdot \dfrac{\omega}{5} \cdot \dfrac{\omega}{20}} & \omega \geqslant 20 \end{cases}$$

得

$$\omega_c = 5 \text{ rad/s}$$

$$\gamma = 180^\circ + \underline{/G(j\omega_c)} =$$

$$180^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{5}{5} - \arctan\frac{5}{20} =$$

$$31^\circ < \gamma^* = 48.3^\circ$$

(3) 计算串联超前校正装置参数。

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma + 5^\circ \sim 10^\circ = 48.3^\circ - 31^\circ + 9.7^\circ = 27^\circ$$

$$a = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = 2.64$$

$$10\lg a = 4.2$$

$$\omega_m = \omega_c \cdot 10^{\frac{4.2}{40}} = 6.38 \text{ rad/s}$$

若取校正后截止频率 $\omega'_c = \omega_m = 6.38$ rad/s 显然不满足要求，可用以下两种方法，设计校正装置。

方法 1　取 $\omega'_c = 8.79$，则

$$\omega_1 = \frac{\omega_c^2}{\omega'_c} = \frac{5^2}{8.79} = 2.84$$

$$\omega_2 = \frac{\omega'^2_c}{\omega_1} = \frac{8.79^2}{2.84} = 27.2$$

校正装置传递函数如下，其对数幅频特性如图 6.4 中 L_c 所示。

$$G_c(s) = \frac{\dfrac{s}{2.84}+1}{\dfrac{s}{27.2}+1}$$

方法 2　将 a 值增大。

取 $a = 9.6$，则

$10\lg a = 9.82$

$\omega_m = \omega'_c = \omega_c 10^{\frac{9.82}{40}} = 8.8 > \omega_c^* = 8.79$

$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\omega_m = \frac{1}{\sqrt{9.6}} \times 8.8 = 2.84$

$\omega_2 = \sqrt{a}\omega_m = \sqrt{9.6} \times 8.8 = 27.27$

校正装置传递函数

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{2.84}+1}{\frac{s}{27.27}+1}$$

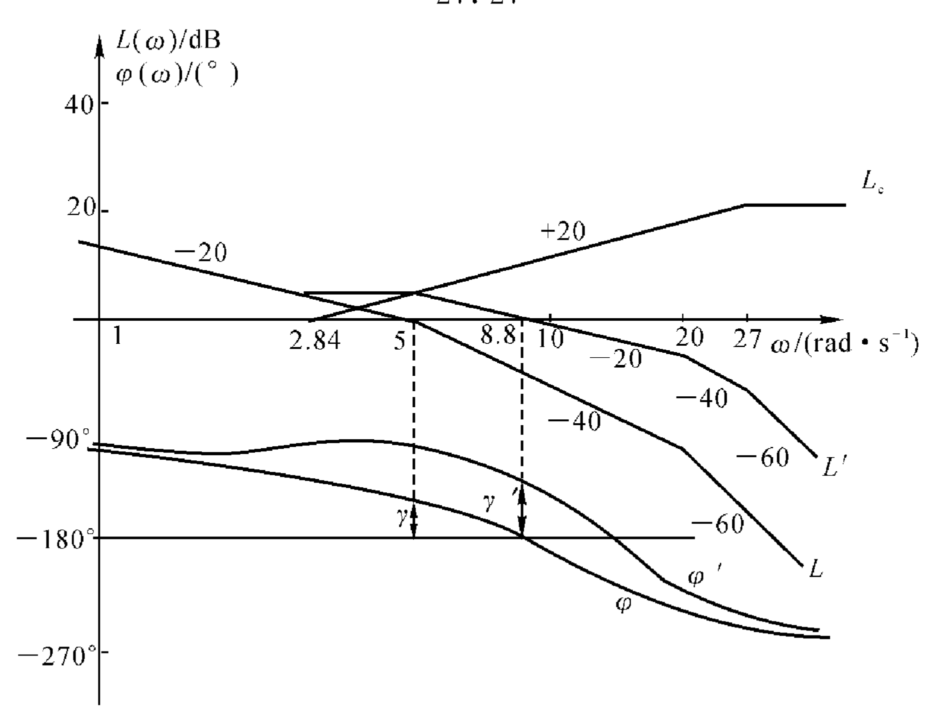


图 6.4　例 6.4 Bode 图

(4) 验算。

校正后系统的开环传递函数如下，其 Bode 如图 6.4 中 L' 和 φ' 所示

$$G'(s) = \frac{5\left(\frac{s}{2.84}+1\right)}{s\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)\left(\frac{s}{27.2}+1\right)}$$

$\gamma' = 180° + \underline{/G'(j\omega'_c)} =$

$$180° + \arctan\frac{8.79}{2.84} - 90° - \arctan\frac{8.79}{5} -$$

$$\arctan\frac{8.79}{20} - \arctan\frac{8.79}{27.2} = 56° > 48.3°$$

6.5　已知单位反馈系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

要求 $K_v^*=30\ \text{s}^{-1}$，$\gamma^*\geqslant 40°$，$\omega_c^*\geqslant 2.3\ \text{rad/s}$，系统是否满足要求，若不满足予以校正。

解　(1) 由 K_v^* 定 K。

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)=K=30$$

(2) 计算原系统指标。

$$G(s)=\frac{30}{s\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

作出原系统 Bode，如图 6.5L 和 φ 所示。

$$|G(j\omega)|=\begin{cases}\dfrac{30}{\omega} & \omega<5\\ \dfrac{30}{\omega\cdot\dfrac{\omega}{5}} & 5\leqslant\omega<10\\ \dfrac{30}{\omega\cdot\dfrac{\omega}{5}\cdot\dfrac{\omega}{10}} & \omega\geqslant 10\end{cases}$$

求得　$$\omega_c=\sqrt[3]{1\ 500}=11.45$$

$$\gamma=180°+\underline{/G(j\omega_c)}=$$

$$180°-90°-\arctan\frac{11.45}{5}-\arctan\frac{11.45}{10}=-25.3°$$

(3) 原系统不满足相角裕度要求，必须校正。

若采用串联超前装置进行校正，可补偿的最大角

$\varphi_m=\gamma^*-\gamma+5°\sim 10°=40-(-25.3°)+6.7°=72°>60°$

一级超前网络不能满足要求，故选择串联迟后装置。

$\gamma_c=\gamma^*+6°=46°$　(6°用于补偿相角迟后的影响)

计算原系统中 $\gamma_c=46°$ 对应的 ω 值。

$\omega_1=2.3$，　$\gamma(\omega_1)=180°+\underline{/G(j\omega_1)}=52.3°$

$\omega_2=2.6$，　$\gamma(\omega_2)=180°+\underline{/G(j\omega_2)}=47.9°$

$\omega_3=3$，　$\gamma(\omega_3)=180°+\underline{/G(j\omega_3)}=42.3°$

取 $\omega_c=2.3$ 可以满足要求，但希望 ω_c 尽可能大些，系统有好的动态性能。

以 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 对应的 γ 值作弧线，从图中求出 $\gamma=46°$ 对应的 ω 值为 2.7，故取 $\omega'_c=2.7$。

(4) 设计校正装置。

过 $\omega'_c = 2.7$ 对应的 A 点作垂线，交 L 于 B，取 $BA = AC$，过 C 点作平行于 0 dB 线至 D 点，D 点对应 $\omega_2 = 0.1\omega'_c = 0.27$，过 D 点作 -20 dB/dec 直线与 0 dB 线交于 E 点，E 点对应 ω_1

$$\frac{30}{2.7} = \frac{0.27}{\omega_1}$$

得
$$\omega_1 = 0.024\ 3$$

校正装置传递函数如下，对数幅频特性如图 6.5 中 L_c 所示。

$$G_c = \frac{\dfrac{s}{0.27} + 1}{\dfrac{s}{0.024\ 3} + 1}$$

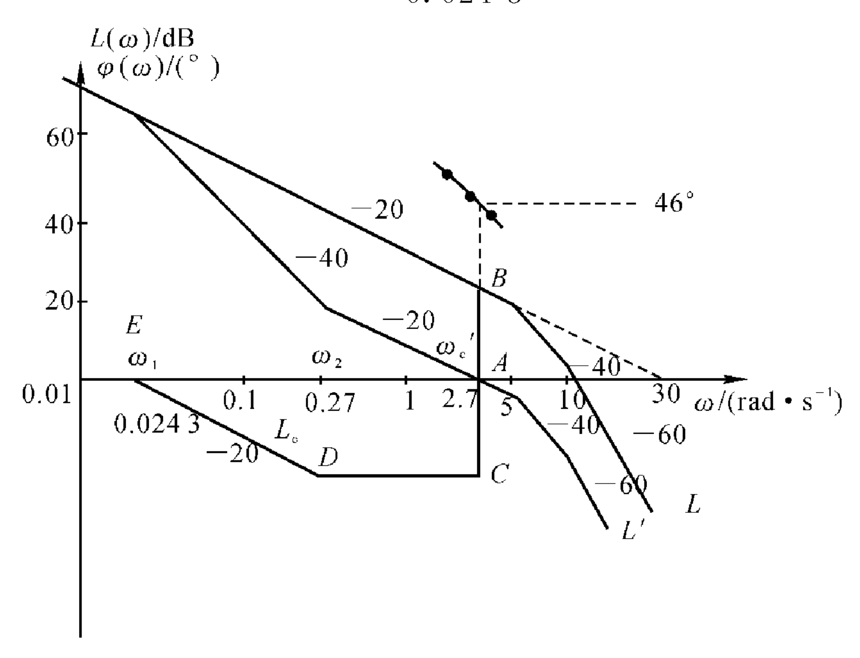


图 6.5 例 6.5Bode 图

(5) 验算。

校正后系统开环传递函数如下，对应 Bode 图如图 6.5 中 L' 和 φ' 所示。

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{30\left(\dfrac{s}{0.27} + 1\right)}{s\left(\dfrac{s}{0.024\ 3} + 1\right)\left(\dfrac{s}{5} + 1\right)\left(\dfrac{s}{10} + 1\right)}$$

$$K_v = K = 30$$

$$\omega'_c = 2.7 > 2.3$$

$$\gamma = 180^\circ + \underline{/G'(j\omega'_c)} =$$

$$180^\circ + \arctan\frac{2.7}{0.27} - 90^\circ - \arctan\frac{2.7}{0.024\ 3} -$$

$$\arctan\frac{2.7}{5} - \arctan\frac{2.7}{10} = 41.3^\circ > 40^\circ$$

6.6　已知单位反馈系统开环传递正数

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

试设计校正装置，使系统当输入为单位斜坡函数时，稳态误差 $e_{ss}^{*}\leqslant 0.2$，相角裕度 $\gamma^{*}\geqslant 40$，幅值裕度 $h^{*}\geqslant 10$ dB。

解　(1) 由 e_{ss} 定 K。

$$e_{ss}^{*}\xlongequal{r(t)=t}\frac{A}{K}=\frac{1}{K}\leqslant 0.2, K\geqslant 5$$

取 $K=10$。

(2) 计算原系统指标。

$$G(s)=\frac{10}{s(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

作出原系统 Bode 图，如图 6.6 中 L 和 φ 所示。

求得

$$\omega_c=\sqrt[3]{20}=2.714\ 4$$

$$\gamma=180^\circ-90^\circ-\arctan 2.714\ 4-\arctan\frac{2.714\ 4}{2}=-33.4^\circ$$

若选用超前装置校正，最大可补偿角度

$$\varphi_m=\gamma^{*}-\gamma+5^\circ\sim 10^\circ=$$

$$40-(-33.4^\circ)+6.6^\circ=80^\circ>60^\circ$$

一级超前校正无法实现，故选择迟后校正。

(3) 计算迟后校正参数。

$$\gamma_c=40^\circ+6^\circ=46^\circ$$

取

$$\omega=0.6, \gamma(0.6)=42.34^\circ$$

$$\omega=0.5, \gamma(0.5)=49.4^\circ$$

$$\omega=0.47, \gamma(0.47)=51.6^\circ$$

过此 3 点作弧线，得出 46° 对应频率 $\omega=0.55$，取 $\omega'_c=0.55$。

(4) 设计校正装置。

过 A 点(对应 $\omega'_c=0.55$)，作垂直于 0 dB 的直线与 L 交于 B 点，取 $BA=AC$，过 C 点作平行于 0 dB 线至 D 点，D 点对应频率 $\omega_2=0.055$，过 D 点作 -20 dB/dec 直线，与 0 dB 线交于 E 点，对应频率为 ω_1。

$$\omega'_c=0.55$$

取 $\omega_2=0.055$。

从 Bode 图上知

$$\frac{10}{0.55}=\frac{0.055}{\omega_1}$$

则

$$\omega_1=0.003\ 025$$

校正装置

$$G_c(s)=\frac{\dfrac{s}{0.055}+1}{\dfrac{s}{0.003\ 025}+1}$$

(5) 验算。

校正后系统传递函数如下,Bode 如图 6.6 中 L' 和 φ 所示。

$$G'(s)=G_c(s)G(s)=\frac{10\left(\dfrac{s}{0.055}+1\right)}{s\left(\dfrac{s}{0.003\ 025}+1\right)(s+1)\left(\dfrac{s}{2}+1\right)}$$

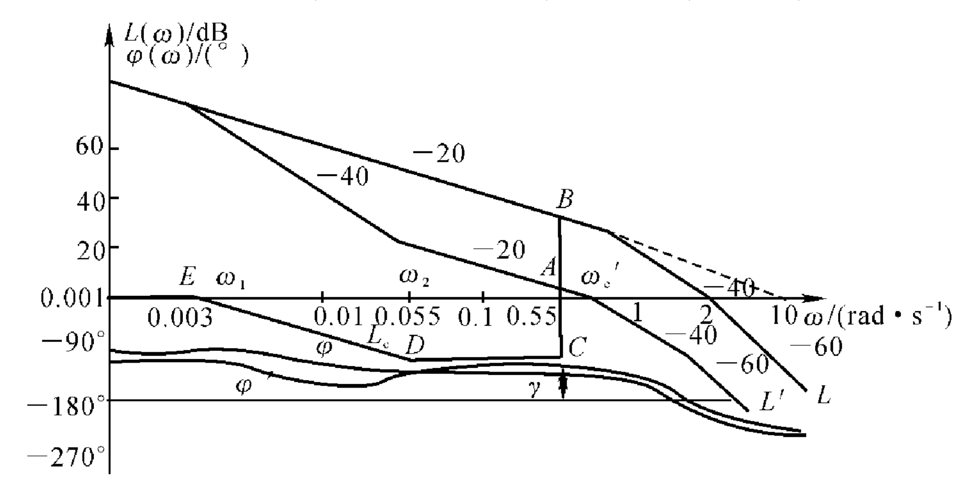


图 6.6 例 6.6Bode 图

① $e'_{ss}=0.1<0.2$

② $\gamma'=180°+\underline{/G'(j\omega'_c)}=$

$$180°+\arctan\frac{0.55}{0.055}-90°-\arctan\frac{0.55}{0.003\ 025}-$$

$$\arctan 0.55-\arctan\frac{0.55}{2}=$$

$$180°+84.29°-90°-89.68°-28.81°-15.38°=$$

$$40.42°>40°$$

③ $\omega_g=\sqrt{2}$,取 $\omega'_g=\omega_g=\sqrt{2}$ (实际上 ω'_g 比 ω_g 靠左)。

$$h'=\frac{1}{|G'(j\omega'_g)|}=$$

$$\frac{1.4\sqrt{\left(\frac{1.4}{0.003}\right)^2+1}\sqrt{1.4^2+1}\sqrt{\left(\frac{1.4}{2}\right)^2+1}}{10\sqrt{\left(\frac{1.4}{0.055}\right)^2+1}}=$$

$$5.38 = 14\ \text{dB} > 10\ \text{dB}$$

设计的校正装置满足要求。但由于 K 取得较大，使得校正装置时间常数很大，在实际中很难找到满足要求的非常大的电阻电容。考虑实际情况，选择参数时满足要求即可，此题要求 $K \geqslant 5$，选择 $K = 5$ 即可。

6.7　单位反馈系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.125s+1)}$$

试设计校正装置，使系统 $K_v \geqslant 10$，相角裕度 $\gamma^* \geqslant 30°$。

解　(1) 确定开环增益 K。

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = K \geqslant 10$$

取 $K = 10$。

(2) 作出原系统 Bode 图，如图 6.7 和图 6.8 中 L 和 φ 所示。

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)\left(\frac{s}{8}+1\right)}$$

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} \dfrac{10}{\omega} & \omega < 1 \\ \dfrac{10}{\omega \cdot \omega} & 1 \leqslant \omega < 8 \\ \dfrac{10}{\omega \cdot \omega \cdot \frac{\omega}{8}} & \omega \geqslant 8 \end{cases}$$

得

$$\omega_c = \sqrt{10} = 3.16$$

$$\gamma = 180° + \angle G(j\omega_c) =$$

$$180° - 90° - \arctan 3.16 - \arctan\frac{3.16}{8} =$$

$$-4° < 30°$$

不满足要求，用下面两种方法校正。

方法 **1**　选择串联超前装置进行校正

(3) 计算校正装置参数。

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma + 5° \sim 10° = 30° - (-4°) + 8° = 42°$$

$$a = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = 5.04$$

$$10\lg a = 7$$

取
$$\omega'_c = \omega_m = \omega_c 10^{\frac{7}{40}} = 3.16 \times 10^{\frac{7}{40}} = 4.73$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_m}{\sqrt{a}} = 2.12$$

$$\omega_2 = \sqrt{a}\omega_m = 10.58$$

校正装置传递函数

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{2.12}+1}{\frac{s}{10.58}+1}$$

(4) 验算。

校正后系统开环传递函数

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{10\left(\frac{s}{2.12}+1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{8}+1\right)\left(\frac{s}{10.58}+1\right)}$$

$$\gamma' = 180^\circ + \underline{/G'(j\omega'_c)} =$$
$$180^\circ + \arctan\frac{4.73}{2.12} - 90^\circ - \arctan\frac{4.73}{8} -$$
$$\arctan\frac{4.73}{10.58} - \arctan 4.73 =$$
$$180^\circ + 65.86^\circ - 90^\circ - 30.59^\circ - 24.09^\circ - 78.06^\circ =$$
$$24^\circ < 30^\circ$$

不满足要求,重新设计。

将 a 值增大,取 $a = 10$。

$$10\lg a = 10$$

取
$$\omega'_c = \omega_m = \omega_c 10^{\frac{10}{40}} = 5.62$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_m}{\sqrt{a}} = \frac{5.62}{\sqrt{10}} = 1.78$$

$$\omega_2 = \sqrt{a}\omega_m = 17.76$$

校正装置传递函数如下,对数幅频特性如图 6.7 中 L_c 所示。

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{1.78}+1}{\frac{s}{17.76}+1}$$

校正后系统开环传递函数

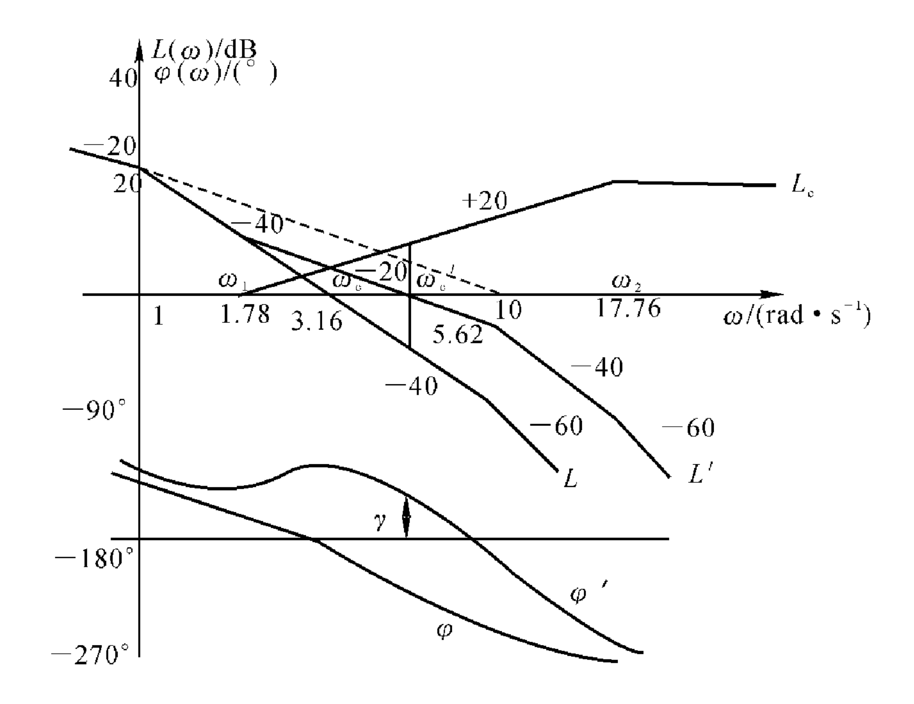


图 6.7　例 6.7 串联超前校正系统 Bode 图

$$G'(s)=G_c(s)G(s)=\frac{10\left(\dfrac{s}{1.78}+1\right)}{s(s+1)\left(\dfrac{s}{8}+1\right)\left(\dfrac{s}{17.76}+1\right)}$$

$$\gamma=180^\circ+\underline{/G'(j\omega'_c)}=$$

$$180^\circ+\arctan\frac{5.62}{1.78}-90^\circ-\arctan\frac{5.62}{17.76}-$$

$$\arctan 5.62-\arctan\frac{5.62}{8}=$$

$$180^\circ+72.43^\circ-90^\circ-17.56-79.9^\circ-35^\circ=$$

$$29.97^\circ<30^\circ$$

再将 ω_2 增大，取 $\omega_2=18$。

$$\gamma=30.19^\circ>30^\circ$$

方法 2　选择串联迟后装置进行校正

(1)，(2) 同方法 1。

(3) 计算校正装置参数。

$$\gamma_c=30^\circ+6^\circ=36^\circ$$

取
$$\omega_1=1.27,\quad \gamma(\omega_1)=29.2^\circ$$
$$\omega_2=1,\quad \gamma(\omega_2)=38^\circ$$
$$\omega_3=1.1,\quad \gamma(\omega_3)=34.5^\circ$$

过此 3 点作弧线，得出 $\omega=1.05$ 时，$\gamma=36^\circ$，取 $\omega'_c=1.05$。

(4) 作图设计。

过 A 点(对应 ω'_c),作垂直于 0 dB 直线与 L 交于 B 点,取 $BA = AC$,过 C 点作平行于 0 dB 直线至 D 点,D 点对应频率 $\omega_1 = 0.105$,过 D 点作斜率是 -20 dB/dec 的直线与 0 dB 线交于 E 点,对应频率为 ω_2。

$$\omega_1 = 0.105$$

由 Bode 图上知

$$40(\lg 3.16 - \lg 1.05) = 20(\lg\omega_1 - \lg\omega_2)$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1.05^2}{3.16^2} = 0.105 \times \frac{1.05^2}{10} = 0.011\,6$$

校正装置传递函数如下

$$G_c(s) = \frac{\dfrac{s}{0.105} + 1}{\dfrac{s}{0.011\,6} + 1}$$

(5) 验算。

校正后系统传递函数如下,Bode 图如图 6.8 中 L' 和 φ' 所示。

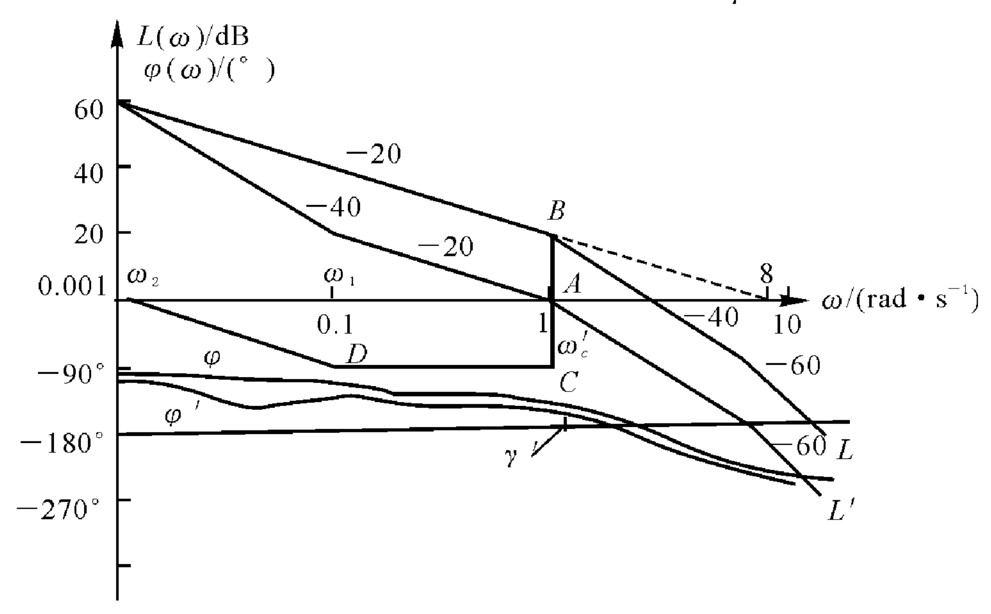


图 6.8 例 6.7 串联迟后校正系统 Bode 图

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{10\left(\dfrac{s}{0.105} + 1\right)}{s\left(\dfrac{s}{0.011\,6} + 1\right)(s+1)\left(\dfrac{s}{8} + 1\right)}$$

$$\gamma' = 180° + \underline{/G'(j\omega'_c)} =$$

$$180° + \arctan\frac{1.05}{0.105} - 90° - \arctan\frac{1.05}{0.011\,6} -$$

$\arctan 1.05 - \arctan \dfrac{1.05}{8} =$

$180° + 84.29° - 90° - 89.37° - 46.4° - 7.48° =$

$31.04° > 30°$

【点评】　由于本例题对截止频率没作要求，故可选择串联超前或迟后装置进行校正。两种校正方法比较如下：

(1) 超前校正是利用超前网络的相角超前特性，使系统的截止频率和相位裕量增加，从而改善了系统的平稳性，提高了快速性。但超前网络同时使高频段幅值增加，系统抗高频干扰能力变差。

(2) 迟后校正是利用迟后网络的幅值衰减的特性，靠牺牲截止频率（截止频率降低），换得相位裕量的增加，改善了系统动性能之平稳性，而快速性变差，但系统的抗高频干扰能力增加。

一般情况下，原系统的截止频率和相角裕度均小于要求值，可以考虑采用超前校正；当原系统的相角裕度小于要求值，而截止频率大于要求值，这时考虑用迟后校正；若既要保证一定的相角裕度，又不使截止频率降低，就要考虑采用迟后-超前校正。

6.8　已知单位反馈系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s\left(\dfrac{s}{10}+1\right)\left(\dfrac{s}{60}+1\right)}$$

设计校正装置使系统当输入 $r(t) = t$ 时，$e_{ss} \leqslant \dfrac{1}{126}$，$\gamma^* \geqslant 45°$，$\omega_c^* \geqslant 20$。

解　(1) 由 e_{ss} 确定 K。

$$e_{ss} = \frac{A}{K} = \frac{1}{K} \leqslant \frac{1}{126},\ K \geqslant 126$$

取 $K = 126$。

(2) 计算原系统指标。

$$G(s) = \frac{126}{s\left(\dfrac{s}{10}+1\right)\left(\dfrac{s}{60}+1\right)}$$

作出原系统 Bode 图，如图 6.9 中 L 和 φ 所示。

$$\omega_c = \sqrt{1\,260} = 36$$

$$\gamma = 180° - 90° - \arctan\frac{36}{10} - \arctan\frac{36}{60} = -15.5°$$

不满足要求，必须校正。

若选串联超前校正，最大超前角

$$\varphi_m = 45° - (-15.5°) + 6.5° = 67° > 60°$$

用一级超前校正不可行。

若选迟后校正，取校正后截止频率 $\omega'_c = 20$，原系统在 $\omega = 20$ 处相角裕量

$\gamma_c(20)=8.2°$,也不能满足要求。故选择迟后一超前校正。

(3) 设计校正装置。

取 $\omega'_c=20$。过 A 点(对应频率是 $\omega'_c=20$),作垂直于 0 dB 直线,与 L 交于 B,取 $BA=AC$,过 C 点作 +20 dB/dec 直线与 0 dB 交于 D 点,对应频率 ω_4,取 $DC=CE$,E 点对应频率 ω_3,过 E 作平行于 0 dB 直线至 F 点,F 对应频率 $\omega_2=0.1\omega'_c=2$,过 F 点作 −20 dB/dec 直线与 0 dB 线交于 G 点,对应频率 ω_1。

$$\omega'_c=20$$

$$40(\lg\omega_c-\lg\omega'_c)=20(\lg\omega_4-\lg\omega'_c)$$

$$\omega_4=\frac{\omega_c^2}{\omega'_c}=\frac{1\ 260}{20}=63$$

因
$$\omega'_c=\sqrt{\omega_3\omega_4}$$

故
$$\omega_3=\frac{\omega'^2_c}{\omega_4}=\frac{20^2}{63}=6.35$$

$$\omega_2=2$$

$$\frac{\omega_4}{\omega_3}=\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$\omega_1=\omega_2\frac{\omega_3}{\omega_4}=2\times\frac{6.35}{63}=0.2$$

校正装置传递函数如下,对数幅频特性如图 6.9 中 L_c 所示。

$$G_c(s)=\frac{\left(\dfrac{s}{2}+1\right)\left(\dfrac{s}{6.35}+1\right)}{\left(\dfrac{s}{0.2}+1\right)\left(\dfrac{s}{63}+1\right)}$$

(4) 验算。

校正后系统的传递函数如下,Bode 图如图 6.9 中 L' 和 φ' 所示。

$$G'(s)=G_c(s)G(s)=\frac{126\left(\dfrac{s}{2}+1\right)\left(\dfrac{s}{6.35}+1\right)}{s\left(\dfrac{s}{0.2}+1\right)\left(\dfrac{s}{10}+1\right)\left(\dfrac{s}{60}+1\right)\left(\dfrac{s}{63}+1\right)}$$

$$\begin{aligned}\gamma'=&180°+\arctan\frac{20}{2}+\arctan\frac{20}{6.35}-90°-\\&\arctan\frac{20}{0.2}-\arctan\frac{20}{10}-\arctan\frac{20}{60}-\mathrm{arctna}\frac{20}{63}=\\&180°+84.29°+72.39°-90°-89.43°-\\&63.43°-18.43°-17.61°=\\&57.78°>45°\end{aligned}$$

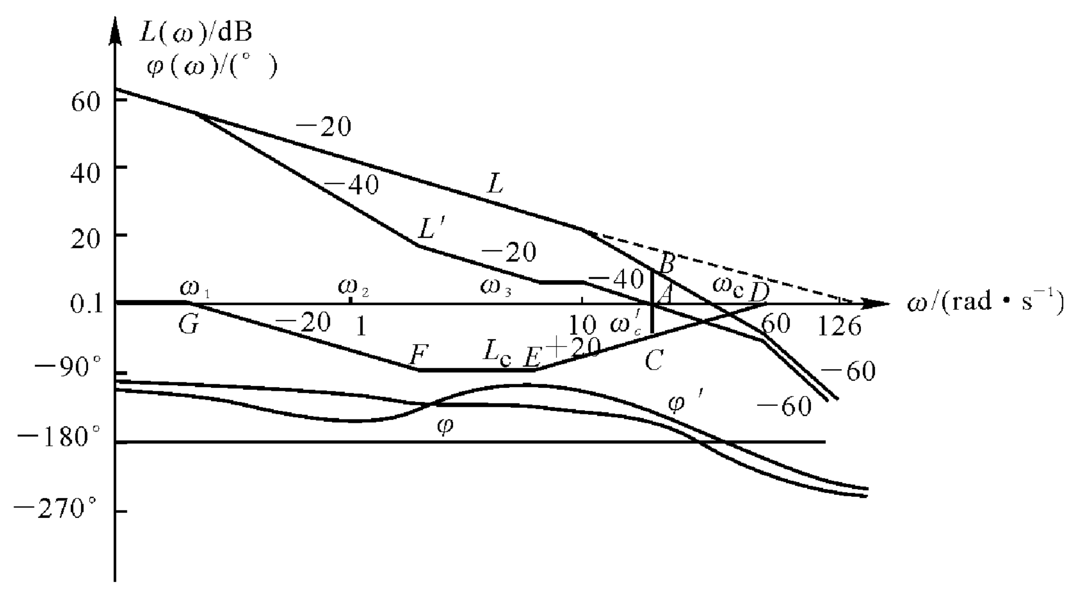


图 6.9　例 6.8 Bode 图

6.9　已知单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

设计校正装置，使系统静态误差系数 $K_v \geqslant 250\ \mathrm{s}^{-1}$，截止频率 $\omega_c^* \geqslant 30$ (rad/s)，相角裕度 $\gamma^* \geqslant 45°$。

解　$$G(s) = \frac{K}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

(1) 取 $K_v = 250$，则

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = K = 250$$

$$G(s) = \frac{250}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

作出原系统对数幅频特性曲线，如图 6.10 中 L 所示。

由 $L(\omega)$ 曲线，得

$$\omega_c = \sqrt{2\ 500} = 50$$

$$\gamma(50) = 180° - 90° - \arctan\frac{50}{10} - \arctan\frac{50}{100} = -15.26°$$

若采用超前校正，需要补偿超前角

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma + 5° \sim 10° = 45° - (-15.26°) + 10° = 70.26°$$

显然用一级超前网络不能达到要求。

若采用迟后校正，原系统在 $\omega'_c = 30$ 处的相角裕量储备为

$$\gamma_c(30) = 180° - 90° - \arctan\frac{30}{10} - \arctan\frac{30}{100} = 1.7°$$

显然用迟后校正也不能满足要求，故选择迟后-超前校正。

(2) 设计校正装置。

取 $\omega'_c=30$。过对应 $\omega'_c=30$ 的 A 点作垂直于 0 dB 直线，与 L 交于 B，取 $BA=AC$，过 C 点作 +20 dB/dec 直线与 0 dB 线交于 D 点，D 点对应频率 ω_4，取 $DC=CE$，E 点对应频率 ω_3，过 E 作平行 0 dB 直线至 F 点，F 点对应频率 ω_2 取为 $0.1\omega'_c$，过 F 点作 −20 dB/dec 直线，与 0 dB 线交于 G 点，G 点对应频率为 ω_1。

$$\omega'_c=30,\ \omega_2=0.1\omega'_c=3$$

$$40(\lg\omega_c-\lg\omega'_c)=20(\lg\omega_4-\lg\omega'_c)$$

$$\omega_4=\frac{\omega_c^2}{\omega'_c}=\frac{50^2}{30}=89.33$$

$$\omega'_c=\sqrt{\omega_3\omega_4}$$

$$\omega_3=\frac{\omega'^2_c}{\omega_4}=10.8$$

取 $\omega_3=10$，则

$$\frac{\omega_4}{\omega_3}=\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$\omega_1=\omega_2\frac{\omega_3}{\omega_4}=3\times\frac{10}{89.33}=0.36$$

校正装置传递函数如下，Bode 图如图 6.10 中 L_c 所示。

$$G_c(s)=\frac{\left(\frac{s}{3}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)}{\left(\frac{s}{0.36}+1\right)\left(\frac{s}{89.33}+1\right)}$$

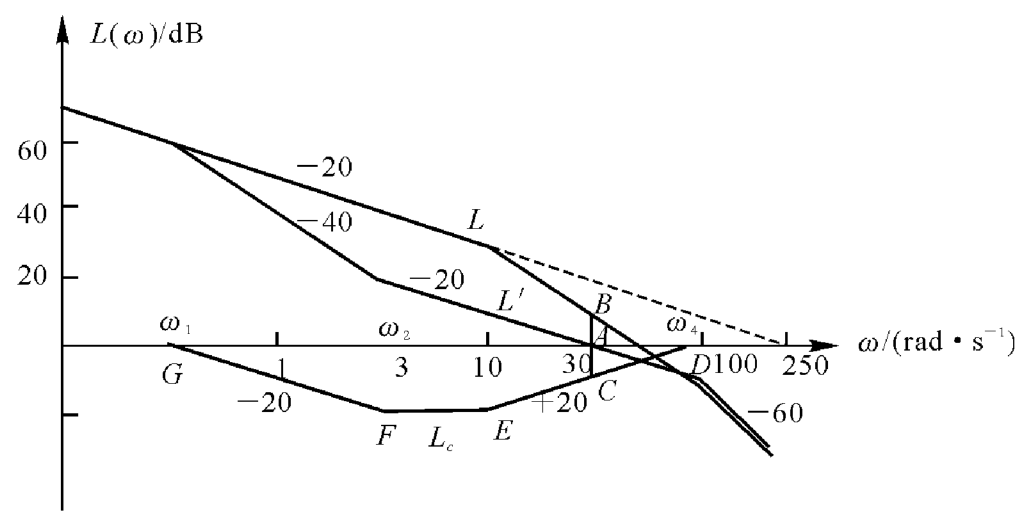


图 6.10 例 6.9 Bode 图

(3) 验算。

校正后系统开环传递函数如下，Bode 图如图 6.10 中 L' 所示。

$$G'(s)=G_c(s)G(s)=\frac{250\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s\left(\frac{s}{0.36}+1\right)\left(\frac{s}{89.33}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

$$\gamma'=180°\angle G'(j\omega'_c)=$$

$$180°+\arctan\frac{30}{3}-90°-\arctan\frac{30}{0.36}-\arctan\frac{30}{89.33}-\arctan\frac{30}{100}=$$

$$180°+84.29°-90°-89.31°-18.56°-16.70°=49.72°>45°$$

6.10　单位反馈系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{400}{s^2(0.01s+1)}$$

图 6.11 所示为 3 种推荐的串联校正网络特性，它们均由最小相角环节组成。试问：

(1) 在这些校正网络特性中，哪一种可使系统的稳定程度最好？

(2) 为了将 12 Hz 的正弦噪声削弱 10 倍左右，采用哪种校正网络特性合适？

解　(1) 由图 6.11 可得校正网络传递函数

(a)　$$G_c(s)=\frac{s+1}{\frac{s}{0.1}+1}$$

(b)　$$G_c(s)=\frac{\frac{s}{10}+1}{\frac{s}{100}+1}$$

(c)　$$G_c(s)=\frac{\left(\frac{s}{2}+1\right)^2}{\left(\frac{s}{0.1}+1\right)\left(\frac{s}{40}+1\right)}$$

以图(a)作校正网络

$$G'(s)=G_c(s)G(s)=\frac{400(s+1)}{s^2(0.01s+1)(10s+1)}$$

截止频率　$\omega_{ca}=\sqrt{40}=6.32$

相角裕度　$\gamma_a=180°+\underline{/G'(j\omega_{ca})}=$

$$180°+\arctan6.32-180°-\arctan0.01\times6.32-$$

$$\arctan10\times6.32=-11.7°$$

以图(b)作校正网络

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{400(0.1s+1)}{s^2(0.01s+1)^2}$$

截止频率　$\omega_{cb} = 40$

相角裕度　$\gamma_b = 180° + \underline{/G'(j\omega_{cb})} =$

$$180° + \arctan 0.1 \times 40 - 180° - 2 \times \arctan 0.01 \times 40 = 32.36°$$

以图(c) 作校正网络

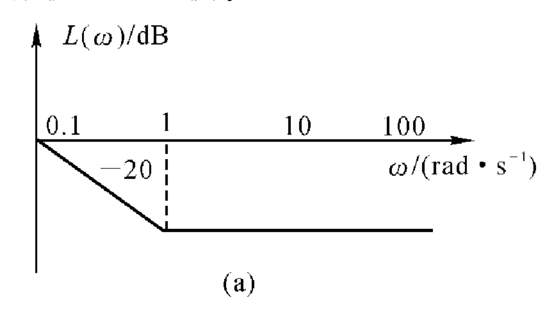
$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{400(0.5s+1)^2}{s^2(0.01s+1)(10s+1)(0.025s+1)}$$

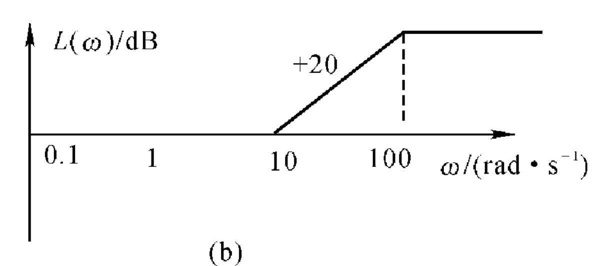
截止频率　$\omega_{cc} = 10$

相角裕度　$\gamma_c = 180° + 2\arctan 0.5 \times 10 - 180° - \arctan 0.01 \times 10 -$

$$\arctan 10 \times 10 - \arctan 0.025 \times 10 = 48.21°$$

可见用(a) 作校正网络，系统不稳定；用(c) 作校正网络稳定程度最好，但响应速度比(b) 作校正网络慢。





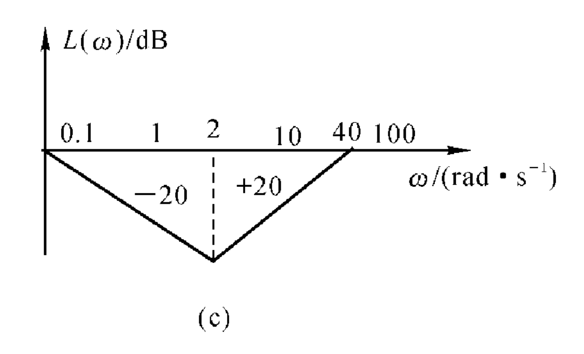


图 6.11　校正网络特性

(2) 作出校正后及原系统 Bode 图，如图 6.12 所示。

要使 12 Hz 正弦噪声削弱 10 倍左右，意味着 12 Hz 正弦信号经过系统后

幅值衰减 10 倍左右。

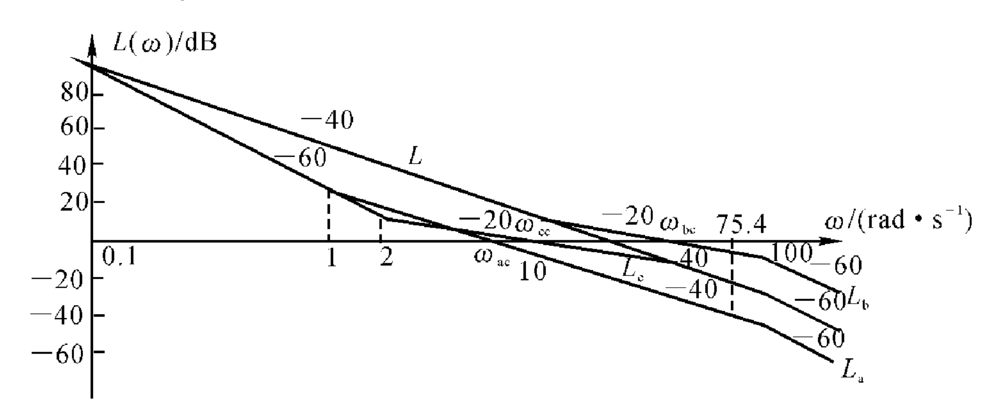


图 6.12　例 6.10 Bode 图

$$f = 12\ \text{Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 75.4\ \text{rad/s}$$

$$20\lg 0.1 = -20\ \text{dB}$$

对于单位反馈系统，高频段闭环幅频特性与开环幅频特性基本一致，从 Bode 图上看在 $\omega = 75.4$ 处，幅值下降 20 dB 左右的只有 L_c，即采用(c)校正网络可达到要求。

6.11　已知系统如图 6.13 所示。

(1) 选择 $G_c(s)$ 使干扰 $n(t)$ 对系统无影响；

(2) 选择 K_2 使系统具有最佳阻尼($\xi = 0.707$)。

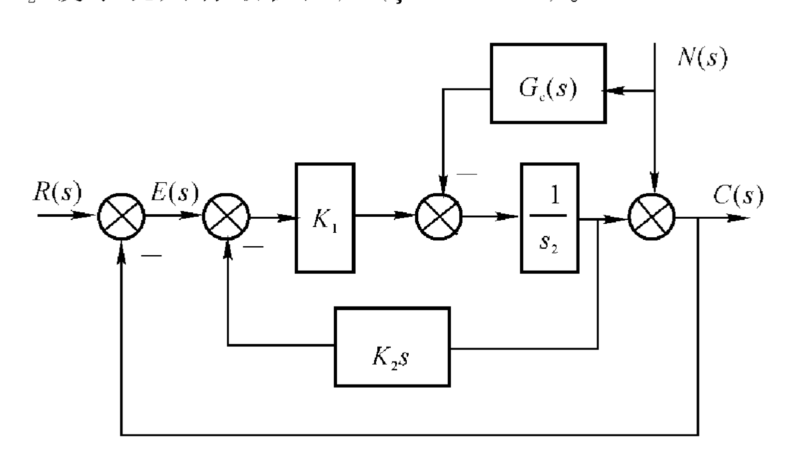


图 6.13　系统结构图

解　(1) 令　$R(s) = 0$

由梅逊增益公式，得

$$C(s) = \frac{1 + \dfrac{K_1 K_2}{s} - \dfrac{1}{s^2}G_c(s)}{1 + \dfrac{K_1 K_2}{s} + \dfrac{K_1}{s^2}}N(s)$$

要使 $n(t)$ 对系统无影响，必须使 $C(s)=0$。

即
$$1+\frac{K_1K_2}{s}-\frac{1}{s^2}G_c(s)=0$$

$$G_c(s)=s^2+K_1K_2s$$

(2) 当 $N(s)=0$ 时

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{K_1}{s^2}}{1+\dfrac{K_1}{s^2}(K_2s+1)}=\frac{K_1}{s^2+K_1K_2s+K_1}$$

有
$$\begin{cases}\omega_n^2=K_1\\2\xi\omega_n=K_1K_2\end{cases}$$

$$\xi=\frac{K_1K_2}{2\omega_n}=\frac{K_1K_2}{2\sqrt{K_1}}=\frac{K_2}{2}\sqrt{K_1}=0.707$$

则
$$K_2=\frac{2\xi}{\sqrt{K_1}}=\frac{2\times0.707}{\sqrt{K_1}}=\sqrt{\frac{2}{K_1}}$$

第七章

线性离散系统的分析与校正

7.1　已知 $x(t)=\sin\omega_1 t=\sin t$，$y(t)=\sin\omega_2 t=\sin 4t$，采样角频率 $\omega_s=3\ \mathrm{rad/s}$，求 $x^*(t)$，$y^*(t)$ 及 $X(z)$，$Y(z)$。

解　已知 $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}=3\ \mathrm{rad/s}$，则采样周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega_s}=\frac{2}{3}\pi(\mathrm{s})$$

$$\begin{aligned}x^*(t)=&\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)=\\&\sum_{n=0}^{\infty}\sin n\frac{2}{3}\pi\cdot\delta(t-nT)=\\&\sin 0\cdot\delta(t)+\sin\frac{2}{3}\pi\cdot\delta(t-T)+\sin\frac{4}{3}\pi\cdot\delta(t-2T)+\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y^*(t)=&\sum_{n=0}^{\infty}y(nT)\delta(t-nT)=\\&\sum_{n=0}^{\infty}\sin n\frac{8}{3}\pi\cdot\delta(t-nT)=\\&\sin 0\cdot\delta(t)+\sin\frac{8}{3}\pi\cdot\delta(t-T)+\sin\frac{16}{3}\pi\cdot\delta(t-2T)+\cdots=\\&\sin 0\cdot\delta(t)+\sin\frac{2}{3}\pi\cdot\delta(t-T)+\sin\frac{4}{3}\pi\cdot\delta(t-2T)+\cdots=\\&x^*(t)\end{aligned}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(n\frac{2}{3}\pi\right)z^{-n}$$

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}y(nT)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(n\frac{8}{3}\pi\right)z^{-n}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(n\,\frac{2}{3}\pi\right)z^{-n} = X(z)$$

【点评】 由上例可以看出：

(1) $\omega_1 = 1\ \text{rad/s} < \frac{1}{2}\omega_s = 1.5$，满足香农采样定理。

$\omega_2 = 4\ \text{rad/s} > \frac{1}{2}\omega_s = 1.5$，不满足香农采样定理，$y^*(t)$ 不能恢复原连续信号。

(2) $\omega_2 - \omega_1 = 3\ \text{rad/s} = \omega_s$

若两个正弦信号频率差正好为采样频率 ω_s 的整数倍，则它们的采样信号完全相同。

(3) z 变换只考虑采样时刻的值，若两个信号不同，但采样时刻的值相同，则这两个信号的 z 变换是相同的。

7.2 已知曲线 $x(t)$ 如图 7.1 所示，采样周期 $T = 1$ s，求 $x(t)$ 的 z 变换。

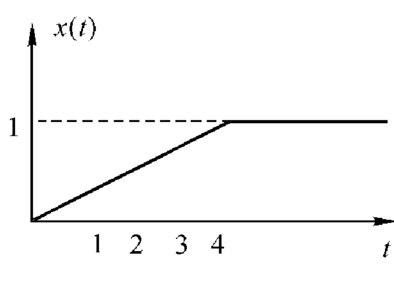


图 7.1 例 7.2 图

解法 1 用级数求和法。由 Z 变换定义

$$X(z) = \sum_{n=0}^{x} x(nT)z^{-n} =$$

$$0.25z^{-1} + 0.5z^{-2} + 0.75z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \cdots =$$

$$0.25z^{-1} + 0.25z^{-2} + 0.25z^{-3} + 0.25z^{-4} + \cdots +$$

$$0.25z^{-2} + 0.25z^{-3} + 0.25z^{-4} + 0.25z^{-5} + \cdots +$$

$$0.25z^{-3} + 0.25z^{-4} + 0.25z^{-5} + \cdots +$$

$$0.25z^{-4} + 0.25z^{-5} + 0.25z^{-6} + \cdots =$$

$$0.25z^{-1}\,\frac{1}{1-z^{-1}} + 0.25z^{-2}\,\frac{1}{1-z^{-1}} +$$

$$0.25z^{-3}\,\frac{1}{1-z^{-1}} + 0.25z^{-4}\,\frac{1}{1-z^{-1}} =$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) =$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})(1 - z^{-1})}{(1-z^{-1})^2} =$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{z^{-1}(1-z^{-4})}{(1-z^{-1})^2}$$

解法 2　查表法

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(t)]=\mathscr{Z}\left[\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}(t-4)\right]=$$

$$\frac{1}{4}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{1}{4}\frac{z^{-4}z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=$$

$$\frac{1}{4}\frac{z^{-1}(1-z^{-4})}{(1-z^{-1})^2}$$

7.3　求 $X(s)=\dfrac{s(2s+3)}{(s+1)^2(s+2)}$ 的 Z 变换。

解法 1　用留数法

$X(s)$ 的极点为

$$s_{1,2}=-1(\text{二重极点}),s_3=-2$$

$$X(z)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left[X(s)\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\right]_{s=s_i}=$$

$$\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{s(2s+3)}{(s+1)^2(s+2)}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}(s+1)^2\right]+$$

$$\lim_{s\to-2}\left[\frac{s(2s+3)}{(s+1)^2(s+2)}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}(s+2)\right]=$$

$$\frac{-Tz\mathrm{e}^{-T}}{(z-\mathrm{e}^{-T})^2}+\frac{2z}{z-\mathrm{e}^{-2T}}$$

解法 2　用部分分式法

$$X(s)=\frac{s(2s+3)}{(s+1)^2(s+2)}=\frac{2s^2+3s}{(s+1)^2(s+2)}=$$

$$\frac{-1}{(s+1)^2}+\frac{2}{s+2}$$

$$X(z)=\mathscr{Z}[X(s)]=\mathscr{Z}\left[\frac{-1}{(s+1)^2}+\frac{2}{s+2}\right]=$$

$$\mathscr{Z}\left[\frac{-1}{(s+1)^2}\right]+\mathscr{Z}\left[\frac{2}{s+2}\right]$$

查表得

$$X(z)=\frac{-Tz\mathrm{e}^{-T}}{(z-\mathrm{e}^{-T})^2}+\frac{2z}{z-\mathrm{e}^{-2T}}$$

7.4　$X(z)=\dfrac{(1-\mathrm{e}^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\mathrm{e}^{-T}z^{-1})}$,

$$Y(z)=\frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2-0.416z+0.208)}$$

求 $x(0)$，$y(\infty)$。

解　根据初值定理

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}=0$$

根据终值定理

$$y(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)Y(z)=$$

$$\lim_{z\to 1}\frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2-0.416z+0.208)}=1$$

7.5 已知 $X(z)$,求其 Z 反变换 $x^*(t)$。

(1) $X(z)=\dfrac{z^2}{(z-0.8)(z-0.1)}$

(2) $X(z)=\dfrac{z}{(z-a)(z-1)^2}$

解 (1) 解法 **1** 幂级数法(长除法)

$$X(z)=\frac{z^2}{z^2-0.9z+0.08}$$

$$\begin{array}{r}
1+0.9z^{-1}+0.732z^{-2}+0.585z^{-3}+\cdots \\
z^2-0.9z+0.08\;\overline{)\,z^2\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
-)\,z^2-0.9z+0.08\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
0.9z-0.08\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
-)\,0.9z-0.81+0.072z^{-1}\qquad\qquad\qquad \\
\hline
0.73-0.072z^{-1}\qquad\qquad\qquad \\
-)\,0.73-0.657z^{-1}+0.058z^{-2} \\
\hline
0.585z^{-1}-0.058z^{-2} \\
\vdots\qquad\qquad
\end{array}$$

$$X(z)=1+0.9z^{-1}+0.73z^{-2}+0.585z^{-3}+\cdots$$

所以 $x^*(t)=\delta(t)+0.9\delta(t-T)+0.73\delta(t-2T)+$
$0.585\delta(t-3T)+\cdots$

解法 **2** 用部分分式展开法

为了能在 Z 变换表中找到相应 $X(z)$ 形式,将 $X(z)$ 写为如下形式

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{(z-0.8)(z-0.1)}=\frac{8/7}{z-0.8}-\frac{1/7}{z-0.1}$$

$$X(z)=\frac{8}{7}\,\frac{z}{z-0.8}-\frac{1}{7}\,\frac{z}{z-0.1}$$

查表得 $x(t)=\dfrac{8}{7}\times(0.8)^{\frac{t}{T}}-\dfrac{1}{7}\times(0.1)^{\frac{t}{T}}$

$$x(nT)=\frac{8}{7}(0.8)^n-\frac{1}{7}(0.1)^n$$

$$x^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{8}{7}(0.8)^n-\frac{1}{7}(0.1)^n\right]\delta(t-nT)$$

解法 **3**　用留数法

$$x(nT)=\sum\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]=$$

$$\sum\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{(z-0.8)(z-0.1)}z^{n-1}\right]=$$

$$\lim_{z\to0.8}\left[(z-0.8)\frac{z^{n+1}}{(z-0.8)(z-0.1)}\right]+$$

$$\lim_{z\to0.1}(z-0.1)\frac{z^{n+1}}{(z-0.8)(z-0.1)}=$$

$$\lim_{z\to0.8}\frac{z^{n+1}}{z-0.1}+\lim_{z\to0.1}\frac{z^{n+1}}{z-0.8}=$$

$$\frac{1}{0.7}(0.8^{n+1}-0.1^{n+1})$$

$$x^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{8}{7}(0.8)^n-\frac{1}{7}(0.1)^n\right]\delta(t-nT)$$

(2) 解法 **1**　长除法

$$X(z)=\frac{z}{z^3-(a+2)z^2+(2a+1)z-a}$$

Divisor: $z^3-(a+2)z^2+(2a+1)z-a$, dividend: z

Quotient: $z^{-2}+(a+2)z^{-3}+(a^2+2a+3)z^{-4}+\cdots$

$$-)\ z-(a+2)+(2a+1)z^{-1}-az^{-2}$$

$$a+2-(2a+1)z^{-1}+az^{-2}$$

$$-)\quad a+2-(a+2)^2z^{-1}+(a+2)(2a+1)z^{-2}-a(a+2)z^{-3}$$

$$(a^2+2a+3)z^{-1}2(a+1)^2z^{-2}+a(a+2)z^{-3}$$

$$\vdots$$

$$X(z)=z^{-2}+(a+2)z^{-3}+(a^2+2a+3)z^{-4}+\cdots$$

$$x^*(t)=\delta(t-2T)+(a+2)\delta(t-3T)+(a^2+2a+3)\delta(t-4T)+\cdots$$

解法 **2**　部分分式展开法

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A}{z-a}+\frac{B}{(z-1)^2}+\frac{C}{z-1}$$

$$A=(z-a)\frac{1}{(z-a)(z-1)^2}\bigg|_{z=a}=\frac{1}{(a-1)^2}$$

$$B=(z-1)^2\frac{1}{(z-a)(z-1)^2}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{1-a}$$

$$C=\frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z-a)(z-1)^2}\right]\bigg|_{z=1}=\frac{-1}{(a-1)^2}$$

$$X(z)=\frac{\frac{1}{(a-1)^2}}{z-a}z+\frac{\frac{-1}{a-1}}{(z-1)^2}z+\frac{\frac{-1}{(a-1)^2}}{z-1}z$$

经查表得

$$x(t)=\frac{1}{(a-1)^2}a^{\frac{t}{T}}-\frac{1}{a-1}\frac{t}{T}-\frac{1}{(a-1)^2}$$

$$x(nT)=\frac{1}{(a-1)^2}a^n-\frac{1}{a-1}n-\frac{1}{(a-1)^2}$$

$$x^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{a^n}{(a-1)^2}-\frac{n}{a-1}-\frac{1}{(a-1)^2}\right]\delta(t-nT)$$

解法 3 留数法

$$x(nT)=\sum\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]=$$

$$\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{z}{(z-1)^2(z-a)}z^{n-1}\right]+$$

$$\lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{z}{(z-1)^2(z-a)}z^{n-1}\right]=$$

$$\frac{a^n}{(a-1)^2}-\frac{n}{a-1}-\frac{1}{(a-1)^2}$$

$$x^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\delta(t-T)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{a^n}{(a-1)^2}-\frac{n}{a-1}-\frac{1}{(a-1)^2}\right]\delta(t-T)$$

【点评】 求 Z 反变换的 3 种方法中，部分分式法通过查 Z 变换表可以方便地求得 $x(t)$，进而写出 $x^*(t)$。留数法可以直接求出 $x(nT)$，因而很容易求得 $x^*(t)$。但这两种方法需要知道 $X(z)$ 的全部极点。幂级数法则无此限制，通用性好，但计算较麻烦，而且往往得不到封闭的表达式。

7.6 试求解差分方程

$$c(n+2)+3c(n+1)+2c(n)=0$$

其中

$$c(0)=0,\ c(1)=1$$

解法 1 用递推方法解差分方程。

由原差分方程有

$$c(n+2)=-3c(n+1)-2c(n)$$

当 $n=0$ 时，$c(2)=-3c(1)-2c(0)=-3\times1-2\times0=-3$；

当 $n=1$ 时，$c(3)=-3c(2)-2c(1)=-3\times(-3)-2\times1=7$；

当 $n=2$ 时，$c(4)=-3c(3)-2c(2)=-3\times7-2\times(-3)=-15$；

$$\vdots$$

解法 2　用 Z 变换方法解差分方程。

对差分方程逐项进行 Z 变换，得

$$[z^2C(z)-z^2c(0)-zc(1)]+3[zC(z)-zc(0)]+2C(z)=0$$

代入初条件并整理，得

$$(z^2+3z+2)C(z)=z$$

$$C(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}$$

进行 Z 反变换，有

$$c^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n-(-2)^n]\delta(t-nT)$$

7.7　两离散系统结构图分别如图 7.2(a)，(b) 所示，采样周期为 T，求其脉冲传递函数，并比较特点。

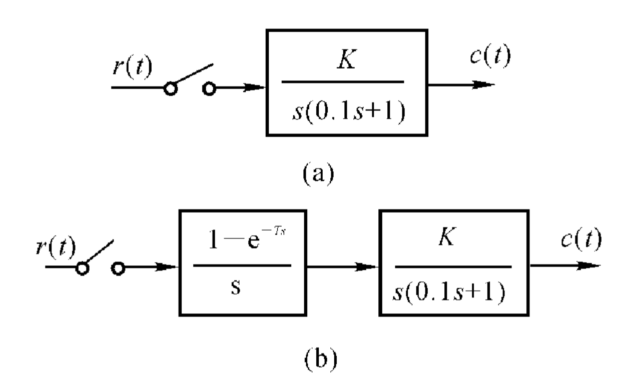


图 7.2　例 7.7 结构图

解　对图 7.2(a) 系统有

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{10K}{s(s+10)}\right]=K\mathscr{Z}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+10}\right]=$$

$$K\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-10T}}\right]=\frac{(1-e^{-10T})Kz}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

对图 7.2(b) 系统有

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{10K}{s(s+10)}\right]=$$

$$K(1-z^{-1})\mathscr{Z}\left[\frac{10}{s^2(s+10)}\right]=$$

$$\frac{K(z-1)}{z}\mathscr{Z}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s(s+10)}\right]=$$

$$K\frac{z-1}{z}\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-10T})z}{10(z-1)(z-e^{-10T})}\right]=$$

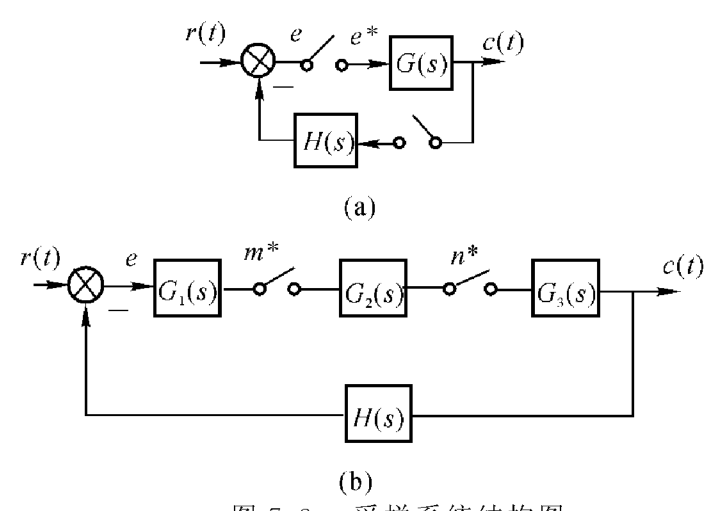
$$K\left[\frac{T}{z-1}-\frac{(1-e^{-10T})}{10(z-e^{-10T})}\right]=$$

$$\frac{K}{10}\frac{(10T-1+\mathrm{e}^{-10T})z+(1-\mathrm{e}^{-10T}-10T\mathrm{e}^{-10T})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-10T})}$$

图 7.2(b) 系统只是在图 7.2(a) 基础上加了零阶保持器，比较两系统脉冲传递函数可以看出，引入零阶保持器并不增加系统的阶次，不改变系统的开环极点，只影响系统的开环零点。

【点评】　推导脉冲传递函数过程中对零阶保持器的处理，总是将其传递函数中的分子 $1-\mathrm{e}^{-Ts}$ 先进行 Z 变换后提出来（为 $1-z^{-1}$），再将剩下的 $\frac{1}{s}$ 归并至后面的环节中。

7.8　采样系统结构如图 7.3 所示。求闭环脉冲传递函数或输出的 Z 变换式。



(b)

图 7.3　采样系统结构图

解　图 7.3(a) 系统

$$C(z)=G(z)E(z)$$

$$E(z)=R(z)-H(z)C(z)=R(z)-H(z)G(z)E(z)$$

$$E(z)=\frac{R(z)}{1+G(z)H(z)}$$

所以

$$C(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+G(z)H(z)}$$

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+G(z)H(z)}$$

图 7.3(b) 系统

$$C(z)=G_3(z)N(z)$$

$$N(z)=G_2(z)M(z)$$

$$M(z)=G_1R(z)-G_1G_3H(z)N(z)$$

整理得

$$C(z)=C_3(z)G_2(z)[G_1R(z)-G_1G_3H(z)C(z)/G_3(z)]=$$
$$G_2(z)G_3(z)G_1R(z)-G_2(z)G_1G_3H(z)C(z)$$

$$C(z)=\frac{G_2(z)G_3(z)G_1R(z)}{1+G_2(z)G_1G_3H(z)}$$

7.9　已知离散系统结构图如图 7.4 所示，试求系统闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 表达式。

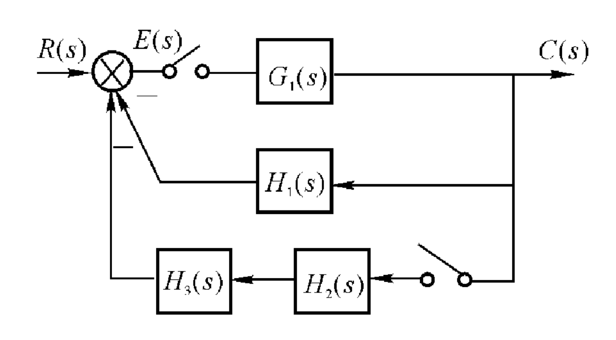


图 7.4　离散系统结构图

解法 **1**　推导法

$$C(z)=G_1(z)E(z)$$

$$E(z)=R(z)-H_1G_1(z)E(z)-H_2H_3(z)C(z)$$

$$E(z)=\frac{R(z)-H_2H_3(z)C(z)}{1+H_1G_1(z)}$$

$$C(z)=\frac{G_1(z)R(z)-H_2H_3(z)G_1(z)C(z)}{1+H_1G_1(z)}$$

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G_1(z)}{1+H_1G_1(z)+G_1(z)H_2H_3(z)}$$

解法 **2**　梅逊公式

由梅逊公式

$$\Phi(z)=\frac{G_1(z)}{1+G_1H_1(z)+G_1(z)H_2H_3(z)}$$

【点评】　对于多回路的采样系统来说，采样开关的位置不同，效应一般也不同，在一般情况下，用梅逊公式不能保证导出的 $\Phi(z)$ 一定正确。所以，求闭环脉冲函数时，要根据系统结构特点，用代数方法或结构图等效变换方法逐步导出 $\Phi(z)$ 表达式。在以下两种情况下用梅逊公式推出 $\Phi(z)$ 或 $C(z)$ 表达式一定是正确的。

(1) 单回路采样系统(不存在前馈通道)，且前向通道中至少存在一个实际的采样开关。

(2) 多回路系统中各环节之间都存在(或等效存在)采样开关。

7.10　离散系统如图 7.5 所示，试求其单位阶跃响应。采样周期 $T=1$ s。

解　系统闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+G(z)}$$

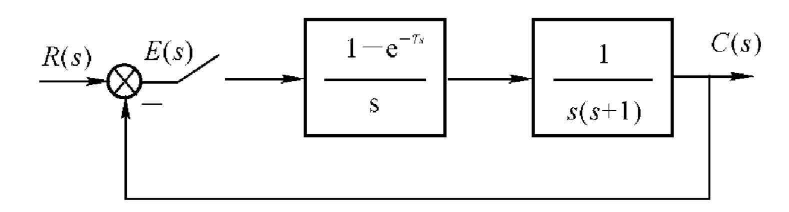


图 7.5 例 7.10 图

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\frac{1}{s(s+1)}\right]=$$

$$(1-z^{-1})\mathscr{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=$$

$$(1-z^{-1})\mathscr{Z}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right]=$$

$$(1-z^{-1})\left[\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-1}}\right]=$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-1}z+1-2\mathrm{e}^{-1}}{z^2-(1+\mathrm{e}^{-1})z+\mathrm{e}^{-1}}=$$

$$\frac{0.368z+0.264}{z^2-1.368z+0.368}$$

$$R(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1}{s}\right]=\frac{z}{z-1}$$

故 $$C(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}R(z)=$$

$$\frac{\dfrac{0.368z+0.264}{z^2-1.368z+0.368}}{1+\dfrac{0.368z+0.264}{z^2-1.368z+0.368}}\cdot\frac{z}{z-1}=$$

$$\frac{0.368z^2-0.264z}{z^3-2z^2+1.632z-0.632}=$$

$$0.368z^{-1}+z^{-2}+1.34z^{-3}+1.34z^{-4}+$$
$$1.147z^{-5}+0.894z^{-6}+0.802z^{-7}+0.866z^{-8}+\cdots$$

对 $C(z)$ 进行 Z 反变换，就可以得到各采样时刻的输出值

$c(0)=0$，$c(T)=0.368$，$c(2T)=1.000$，$c(3T)=1.340$，$c(4T)=1.340$，$c(5T)=1.147$，$c(6T)=0.894$，$c(7T)=0.802$，$c(8T)=0.866\cdots$

7.11　离散系统结构图如图 7.6 所示。试确定使系统稳定的参数 K 与采样周期 T 之间关系，并求 $T=1$ s 时临界放大倍数 K_c。

解　(1) 系统开环脉冲传递函数为

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{K}{s(s+1)}\right]=\frac{Kz(1-\mathrm{e}^{-T})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T})}$$

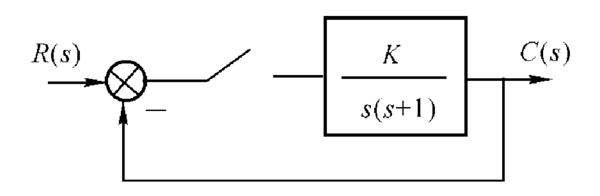


图 7.6　例 7.11 图

闭环特征方程为

$$D(z) = (z-1)(z-\mathrm{e}^{-T}) + Kz(1+\mathrm{e}^{-T}) =$$
$$z^2 + [(1-\mathrm{e}^{-T})K - (1+\mathrm{e}^{-T})]z + \mathrm{e}^{-T} = 0$$

方法 **1**　用朱利稳定判据。

列朱利阵列

行数	z^0	z^1	z^2
1	e^{-T}	$(1-\mathrm{e}^{-T})K-(1+\mathrm{e}^{-T})$	1
2	1	$(1-\mathrm{e}^{-T})K-(1+\mathrm{e}^{-T})$	e^{-T}

系统若要稳定，应有

$D(1) = 1 + [(1-\mathrm{e}^{-T})K - (1-\mathrm{e}^{-T})] + \mathrm{e}^{-T} > 0$

$D(-1) = 1 - [(1-\mathrm{e}^{-T})K - (1-\mathrm{e}^{-T}] + \mathrm{e}^{-T} > 0$

$\mathrm{e}^{-T} < 1$

整理，得稳定条件

$$0 < K < \frac{2(1+\mathrm{e}^{-T})}{1-\mathrm{e}^{-T}}$$

$$T > 0$$

图 7.7 给出参数 $K-T$ 的稳定区域。

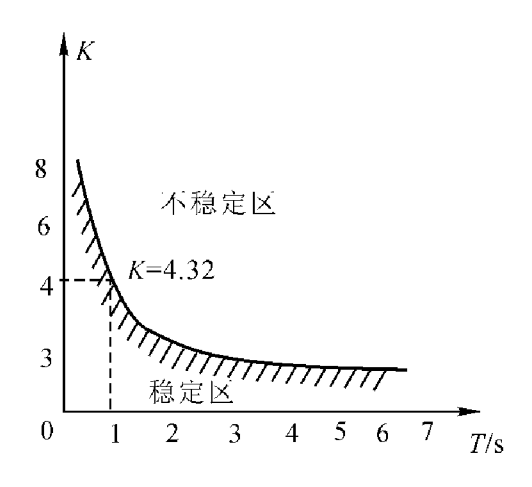


图 7.7　$K-T$ 所确定的稳定区域

方法 2　用 W 域劳斯判据。

将 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$ 代入特征方程，经整理可得

$$Kw^2+2w+\left[\frac{2(1+e^{-T})}{1-e^{-T}}-K\right]=0$$

列劳斯表

$$\begin{array}{lll} w^2 & K & \dfrac{2(1+e^{-T})}{1-e^{-T}}-K \\ w & 2 & 0 \\ w^0 & \dfrac{2(1+e^{-T})}{1-e^{-T}}-K & \end{array}$$

要使系统稳定，必须使劳斯表第一列系数大于零，即

$$K>0$$

$$\frac{2(1+e^{-T})}{1-e^{-T}}-K>0$$

$$0<K<\frac{2(1+e^{-T})}{1-e^{-T}}$$

(2) $T=1$ s 时，放大倍数的临界值为

$$K_c=\frac{2(1+e^{-T})}{1-e^{-1}}=4.32$$

从图 7.7 可以看出放大倍数 K 增加对稳定性不利，采样周期增加对稳定性也不利。

7.12　采样系统如图 7.8 所示，$T=1$ s，求放大倍数的临界值，并与例 7.11 比较，分析零阶保持器对系统稳定性的影响。

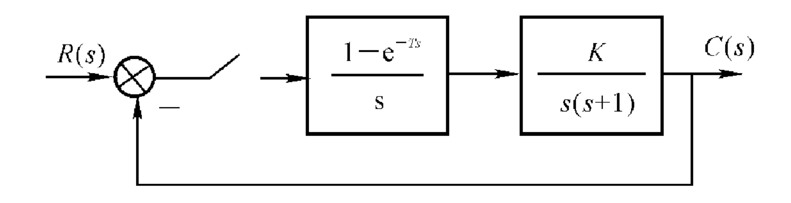


图 7.8　例 7.12 图

解　系统开环脉冲传递函数为

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s(s+1)}\right]=$$

$$K(1-z^{-1})\mathscr{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=$$

$$\frac{K[(T-1+e^{-T})z+(1+e^{-T}-Te^{-T})]}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$T = 1$ s 时

$$G(z) = \frac{K(0.368z + 0.264)}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

闭环系统特征方程为

$$D(z) = z^2 + (0.368K - 1.368)z + (0.264K + 0.368) = 0$$

用朱利稳定判据。列朱利阵列

行数	z^0	z^1	z^2
1	$0.264K + 0.368$	$0.368K - 1.368$	1
2	1	$0.368K - 1.368$	$0.264K + 0.368$

要使系统稳定，应有

$$D(1) = 0.632K > 0$$

$$D(-1) = 2.368 - 0.102K > 0$$

$$0.264K + 0.368 < 1$$

即

$$0 < K < 2.39$$

故放大倍数的临界值为

$$K_c = 2.39$$

与例 7.11 相比较，临界放大倍数减小了。由此可见，零阶保持器的加入对系统稳定性产生了不利影响，零阶保持器可近似看成是延迟时间为 $\frac{T}{2}$ 的延迟环节，它会使系统相角裕度减小。

7.13　离散系统如图 7.9 所示，$T = 1$ s，求临界放大倍数 K_c，并与例 7.11 比较，分析纯时间延迟对离散系统稳定性的影响。

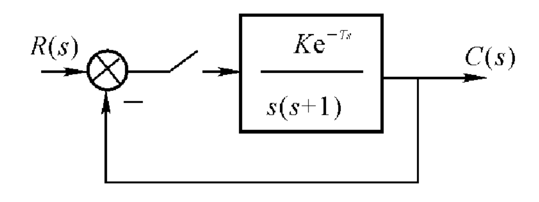


图 7.9　采样系统结构图

解　系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \mathscr{Z}\left[\frac{Ke^{-Ts}}{s(s+1)}\right] = Kz^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] =$$

$$\frac{K(1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})} = \frac{0.632K}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

系统闭环特征方程为

$$D(z) = z^2 - 1.368z + 0.368 + 0.632K$$

令 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$ 进行 w 变换，得到以 w 为变量的特征方程

$D(\omega)=0.632Kw^2+(1.264-1.264K)w+2.736+0.632K=0$

二阶系统只要 $D(w)$ 各项系数大于零，就可保证系统稳定，即

$$K>0$$
$$1.264-1.264K>0$$
$$2.736+0.632K>0$$

使系统稳定的 K 范围为

$$0<K<1$$

临界放大倍数

$$K_c=1$$

与例 7.11 相比临界放大倍数下降。由此可见，纯延迟环节对离散系统稳定性不利。

7.14　系统结构如图 7.10 所示。

(1) 求系统闭环脉冲传递函数；

(2) 当 $K=10,T=0.2$ s 时，分别求 $r(t)$ 为 $1(t),t,\dfrac{1}{2}t^2$ 时系统的稳态误差。

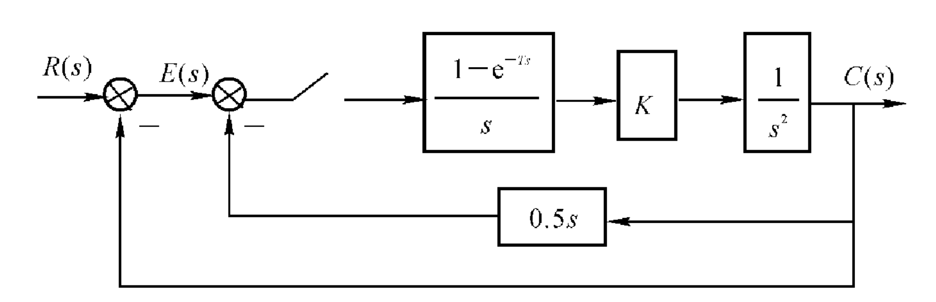


图 7.10　例 7.14 图

解　(1) 系统开环脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{C(z)}{E(z)}=\frac{\mathscr{Z}\left[\dfrac{K(1-e^{-Ts})}{s^3}\right]}{1+\mathscr{Z}\left[\dfrac{0.5Ks(1-e^{-Ts})}{s^3}\right]}=$$

$$\frac{K(1-z^{-1})\mathscr{Z}\left[\dfrac{1}{s^3}\right]}{1+0.5K(1-z^{-1})\mathscr{Z}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]}=\frac{K\left(\dfrac{z-1}{z}\right)\dfrac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}}{1+0.5K\left(\dfrac{z-1}{z}\right)\dfrac{Tz}{(z-1)^2}}=$$

$$\frac{\dfrac{1}{2}KT^2(z+1)}{(z-1)(z-1+0.5TK)}$$

系统闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+G(z)}=$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{1}{2}KT^2(z+1)}{(z-1)(z-1+0.5TK)}}{1+\dfrac{\dfrac{1}{2}KT^2(z+1)}{(z-1)(z-1+0.5TK)}}=$$

$$\frac{\dfrac{1}{2}KT^2(z+1)}{z^2+\left(\dfrac{1}{2}KT^2+0.5KT-2\right)z+1-0.5KT+\dfrac{1}{2}KT^2}$$

(2) $K=10,T=0.2$ 时,系统开环脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{\dfrac{1}{2}KT^2(z+1)}{(z-1)(z-1+0.5KT)}=\frac{0.2(z+1)}{z(z-1)}\quad(\text{系统型别 } v=1)$$

系统闭环特征方程为

$$D(z)=z^2+\left(\frac{1}{2}KT^2+0.5KT-2\right)z+1-0.5KT+\frac{1}{2}KT^2=$$

$$z^2-0.8z+0.2=0$$

特征根为

$$z_{1,2}=0.4\pm \mathrm{j}0.2$$

$$|z_{1,2}|=\sqrt{0.4^2+0.2^2}=0.447<1$$

特征根全部在单位圆内,系统稳定。

求稳态误差如下:

方法 **1** 用一般方法求稳态误差。

$K=10,T=0.2$ 时,系统的闭环脉冲函数为

$$\Phi(z)=\frac{0.2(z+1)}{z^2-0.8z+0.2}$$

系统的误差脉冲传递函数为

$$\Phi_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=1-\Phi(z)=\frac{z^2-z}{z^2-0.8z+0.2}=\frac{z(z-1)}{z^2-0.8z+0.2}$$

$$e_{ss}=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\Phi_e(z)R(z)=$$

$$\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{z(z-1)}{z^2-0.8z+0.2}R(z)=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^2}{z^2-0.8z+0.2}R(z)$$

当 $r(t)=1(t)$ 时,

$$R(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$e_{ss}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^2}{z^2-0.8z+0.2}\cdot\frac{z}{z-1}=0$$

当 $r(t)=t$ 时，

$$R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}=\frac{0.2z}{(z-1)^2}$$

$$e_{ss}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^2}{z^2-0.8z+0.2}\cdot\frac{0.2z}{(z-1)^2}=0.5$$

当 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 时，

$$R(z)=\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}=\frac{0.02z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$e_{ss}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^2}{z^2-0.8z+0.2}\cdot\frac{0.02z(z+1)}{(z-1)^3}=\infty$$

方法 **2**　用静态误差系数法。

$$K_p=\lim_{z\to 1}G(z)=\lim_{z\to 1}\frac{0.2(z+1)}{z(z-1)}=\infty$$

$$K_v=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)=\lim_{z\to 1}\frac{0.2(z+1)}{z}=0.4$$

$$K_a=\lim_{z\to 1}(z-1)^2G(z)=\lim_{z\to 1}\frac{0.2(z+1)(z-1)}{z}=0$$

$r(t)=1$ 时，$e_{ss}=\dfrac{1}{1+K_p}=0$

$r(t)=t$ 时，$e_{ss}=\dfrac{T}{K_v}=\dfrac{0.2}{0.4}=0.5$

$r(t)=\dfrac{1}{2}t^2$ 时，$e_{ss}=\dfrac{T^2}{K_a}=\infty$

【点评】（1）求离散系统稳态误差时要注意误差定义。若本题误差定义在第二个比较点之后，求开环脉冲传递函数时则要将内外反馈通道并在一起处理。

（2）离散系统静态误差系数法的适用条件可参见连续系统的相应部分。

表 7.1 给出用静态误差系数法计算稳态误差的公式。

表 **7.1** 典型输入作用下的稳态误差

系统型别	$r(t)=1(t)$ 时的 e_{ss}	$r(t)=t$ 时的 e_{ss}	$r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 时的 e_{ss}
0 型	$1/(1+K_p)$	∞	∞
Ⅰ 型	0	T/K_v	∞
Ⅱ 型	0	0	T^2/K_a
Ⅲ 型	0	0	0

其中，$K_p = \lim\limits_{z\to1} G(z)$，$K_v = \lim\limits_{z\to1}(z-1)G(z)$，$K_a = \lim\limits_{z\to1}(z-1)^2 G(z)$。

7.15　设离散系统结构图如图 7.11 所示，$K=2$，采样周期 $T=1$ s。试在 Bode 图上分析系统的稳定性。

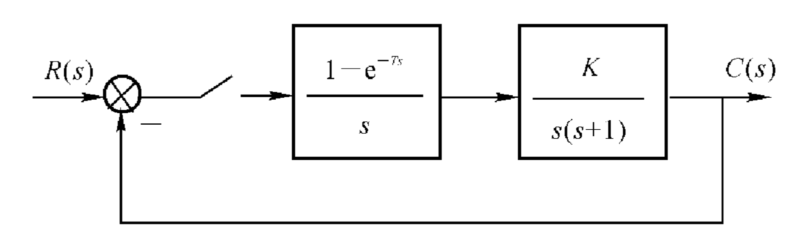


图 7.11　离散系统结构图

解　系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \mathscr{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s(s+1)}\right]=$$

$$K(1-z^{-1})\mathscr{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=$$

$$K\frac{z-1}{z}\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]=$$

$$\frac{KT}{z-1}-\frac{K(1-e^{-T})}{z-e^{-T}}=$$

$$\frac{K[(T-1+e^{-T})z+1-e^{-T}-Te^{-T}]}{z^2-(1+e^{-T})z+e^{-T}}$$

将 $K=2$，$T=1$ 代入得

$$G(z)=\frac{2(0.37z+0.26)}{z^2-1.37z+0.37}$$

令 $z=\dfrac{1+w}{1-w}$，整理得

$$G(w)=\frac{(1-w)(0.175w+1)}{w(2.17w+1)}$$

将 $w=\mathrm{j}v$（v 称为伪频率）代入得

$$G(\mathrm{j}v)=\frac{(1-\mathrm{j}v)(0.175\mathrm{j}v+1)}{\mathrm{j}v(2.17\mathrm{j}v+1)}$$

伪转折频率

$$v_1=\frac{1}{2.17}=0.45$$

$$v_2=1$$

$$v_3=\frac{1}{0.175}=5.7$$

伪截止频率

$$v_c=\sqrt{0.45}=0.67$$

伪对数幅频和相频特性如图 7.12 所示。由图可见系统是稳定的。

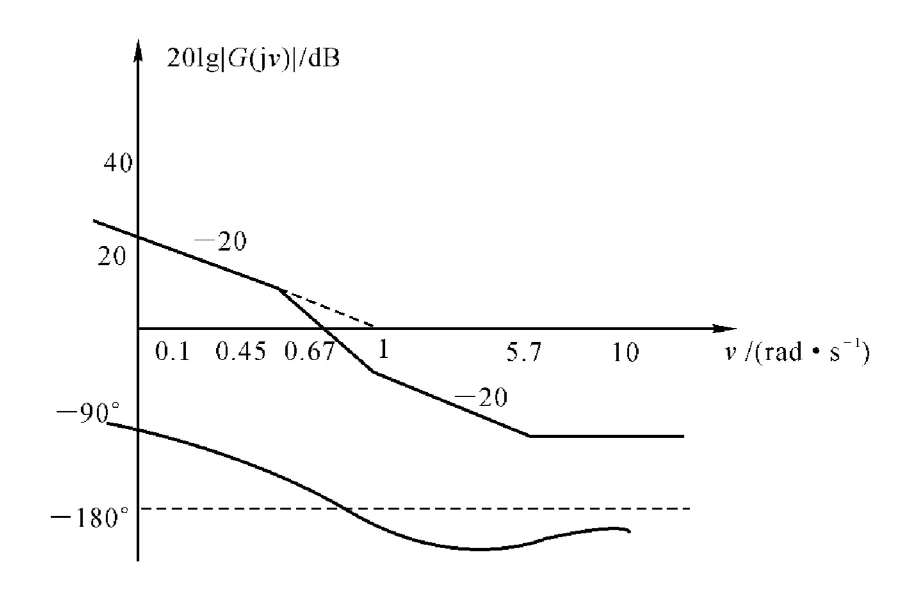


图 7.12 伪对数频率特性

7.16 采样系统结构图如图 7.13 所示，采样周期 $T=1$ s，试确定使系统稳定的 K 值范围及 $K=1, r(t)=t$ 时系统的稳态误差。

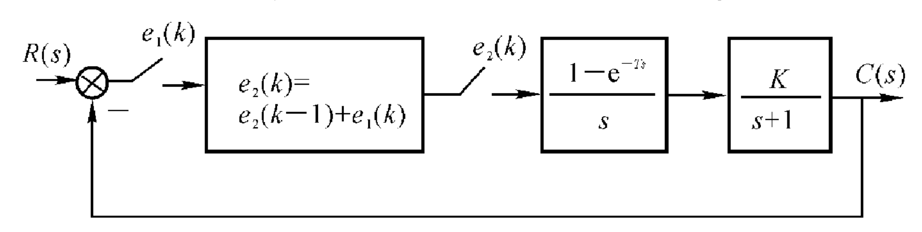


图 7.13 采样系统结构图

解 (1) 先确定控制器的脉冲传递函数

$$e_2(k)=e_2(k-1)+e_1(k)$$

$$E_2(z)=z^{-1}E_2(z)+E_1(z)$$

$$\frac{E_2(z)}{E_1(z)}=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

系统开环脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{z}{z-1}\mathscr{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s+1}\right]=$$

$$\mathscr{Z}\left[\frac{K}{s(s+1)}\right)=\frac{K(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}=$$

$$\frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)} \quad (系统型别\ v=1)$$

系统闭环特征方程为

$$D(z)=(z-1)(z-0.368)+0.632Kz=$$

$$z^2+(0.632K-1.368)z+0.368=0$$

由朱利判据，系统稳定的条件为

$$D(1) = 0.632K > 0$$

$$D(-1) = 2.736 - 0.632K > 0$$

$$b_0 = 0.368 < b_1 = 1$$

即

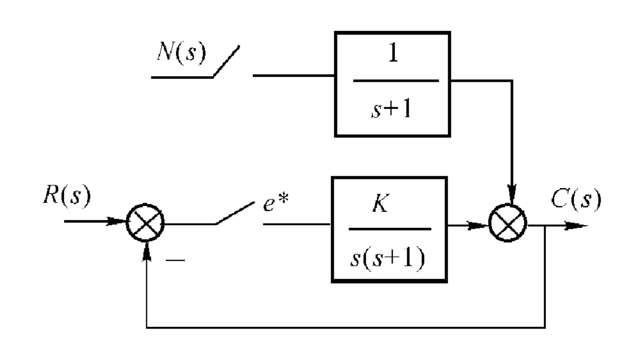
$$0 < K < 4.329$$

(2) 用静态误差系数法求稳态误差

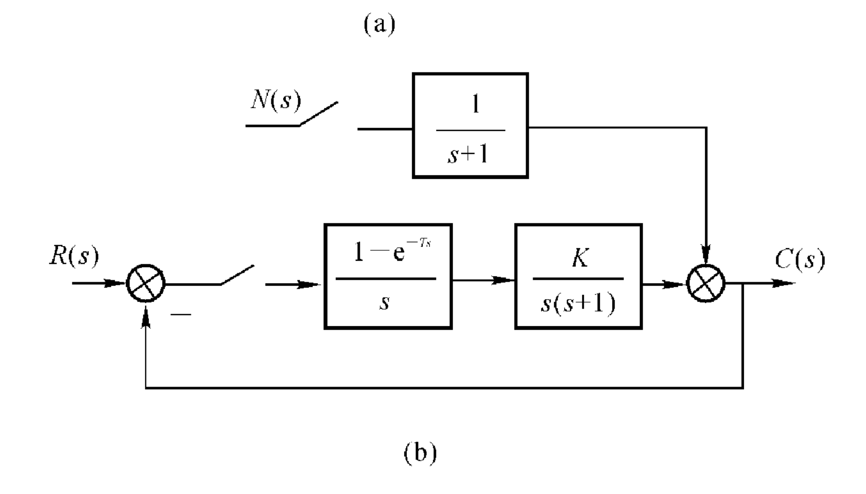
$$K_v = \lim_{z\to 1}(z-1)G(z) = \lim_{z\to 1}\frac{0.632Kz}{z-0.368} = K$$

$$e_{ss} = \frac{T}{K_v} = \frac{T}{K} = 1$$

7.17　已知系统结构如图 7.14(a) 所示，采样周期 $T = 1$ s，当 $r(t) = 2t$，$n(t) = 1(t)$ 时，求系统稳态误差。如果在系统中引入零阶保持器，如图 7.14(b) 所示，且 $r(t)$ 和 $n(t)$ 不变，系统的稳态误差会如何变化？



(a)



(b)

图 7.14　采样系统结构图

解　(1) 在使系统稳定的 K 值范围内，$r(t) = 2t$ 作用时的系统稳态误差可以用静态误差系数法计算。

系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \mathscr{Z}\left[\frac{K}{s(s+1)}\right] = \frac{Kz(1-\mathrm{e}^{-T})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T})} \quad (\text{系统型别 } v=1)$$

静态速度误差系数

$$K_{\mathrm{v}} = \lim_{z\to1}(z-1)G(z) = \lim_{z\to1}\frac{Kz(1-\mathrm{e}^{-T})}{(z-\mathrm{e}^{-T})} = K$$

$$e_{\mathrm{ss}r} = 2\times\frac{T}{K_{\mathrm{v}}} = \frac{2T}{K}$$

$n(t) = 1(t)$ 作用时,用一般方法计算稳态误差。

$$E_n(z) = -C(z) = -[G(z)E_n(z) + G_n(z)N(z)]$$

$$G_n(z) = \mathscr{Z}\left[\frac{1}{s+1}\right] = \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-T}}$$

$$E_n(z) = -\frac{G_n(z)N(z)}{1+G(z)}$$

将 $N(z) = \dfrac{z}{z-1}$ 代入,得

$$E_n(z) = \frac{-z^2}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T}) + Kz(1-\mathrm{e}^{-T})}$$

所以

$$e_{\mathrm{ss}n} = \lim_{z\to1}(z-1)E_n(z) = 0$$

系统总稳态误差为

$$e_{\mathrm{ss}} = e_{\mathrm{ss}r} + e_{\mathrm{ss}n} = \frac{2T}{K}$$

(2) 引入零阶保持器后,系统结构如图 7.14(b) 所示,系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \mathscr{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\frac{K}{s(s+1)}\right] = K\left[\frac{T}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-\mathrm{e}^{-T}}\right]$$

静态误差系数为

$$K_{\mathrm{v}} = \lim_{z\to1}(z-1)G(z) = KT$$

$$e_{\mathrm{ss}r} = 2\times\frac{T}{K_{\mathrm{v}}} = \frac{2}{K}$$

当 $n = 1(t)$ 作用时

$$E_n(z) = -\frac{G_n(z)N(z)}{1+G(z)} = \frac{\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{-T}}\,\dfrac{z}{z-1}}{1+K\left[\dfrac{T}{z-1} - 1 + \dfrac{z-1}{z-\mathrm{e}^{-T}}\right]}$$

$$e_{\mathrm{ss}n} = \lim_{z\to1}(z-1)E_n(z) = 0$$

总稳态误差为

$$e_{\mathrm{ss}} = e_{\mathrm{ss}r} + e_{\mathrm{ss}n} = \frac{2}{K}$$

可见，在没有引入零阶保持器时，系统稳态误差除了与输入信号和系统结构参数有关外，还与采样周期 T 有关，缩短 T 有利于减小稳态误差。引入零阶保持器后，系统稳态误差与 T 无关，和具有相同传递函数的连续系统的稳态误差相同。

7.18　采样系统结构如图 7.15 所示，试用 Z 域根轨迹法分析当开环增益 $K=0\to\infty$ 时，系统动态性能的变化趋势。采样周期 $T=1$ s。

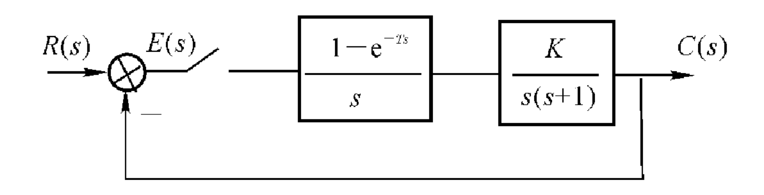


图 7.15　例 7.18 采样系统结构图

解　系统开环脉冲传递函数为

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s(s+1)}\right]=$$

$$\frac{K[(T-1+e^{-T})z+(1-e^{-T}-Te^{-T})]}{(z-1)(z-e^{-T})}=\frac{0.368K(z+0.718)}{(z-1)(z-0.368)}$$

绘制根轨迹。

求分离点：

$$\frac{1}{d-1}+\frac{1}{d-0.368}=\frac{1}{d+0.718}$$

即
$$d^2+1.436d-1.3502=0$$

得
$$d_1=0.648,\ d_2=-2.084$$

d_1 对应的 K 值为

$$K_{d_1}=\frac{|d_1-1||d_1-0.368|}{0.368|d_1+0.718|}=0.196$$

复平面的根轨迹是以$(-0.718,\mathrm{j}0)$为圆心的圆，其半径为

$$R=\frac{0.648-(-2.084)}{2}=1.366$$

确定根轨迹与单位圆交点 A 的坐标$(x+\mathrm{j}y)$，A 点坐标应满足

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\(x+0.718)^2+y^2=1.366^2\end{cases}$$

联立求解得
$$A=x+\mathrm{j}y=0.244+\mathrm{j}0.97$$

A 点对应的 K 值为

$$K_A=\frac{|x+\mathrm{j}y-1||x+\mathrm{j}y-0.368|}{0.368|x+\mathrm{j}y+0.718|}=2.39$$

画出根轨迹如图 7.16 所示，系统动态性的变化趋分析如下：

当 $0<K<K_{d_1}=0.196$ 时，系统的单位阶跃响应序列单调收敛；
当 $K_{d_1}<K<K_A=2.39$ 时，系统的单位阶跃响应序列振荡收敛；
当 $K>K_A$ 时，系统不稳定，单位阶跃响应振荡发散。

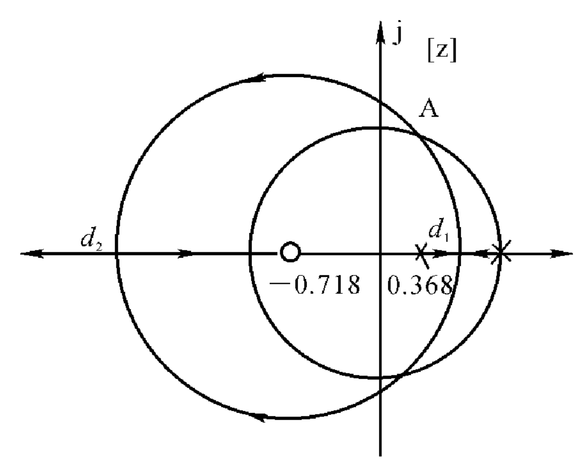


图 7.16　Z 域根轨迹

【点评】 Z 平面是复平面，连续系统根轨迹的绘制法则完全可以用于 Z 平面，只是要注意 S 平面对 Z 平面的映射关系。在连续系统中，决定系统是否稳定的边界是虚轴，而在离散系统中，决定系统是否稳定的边界是单位圆。

7.19　采样系统结构如图 7.17 所示，采样周期 $T=0.2$ s。要求静态速度误差系数 $K_v\geqslant 2\ \mathrm{s}^{-1}$，相角裕度 $\gamma\geqslant 45^\circ$。试用 w 变换法设计数字控制器。

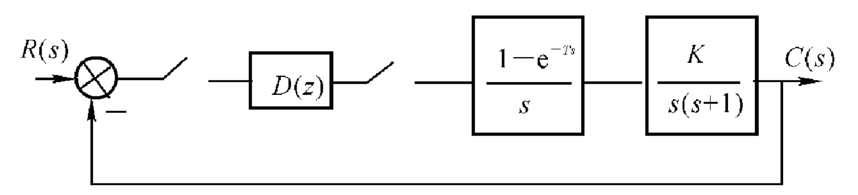


图 7.17　采样系统结构图

解　广义对象的脉冲传递函数

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s(s+1)}\right]=(1-z^{-1})\mathscr{Z}\left[\frac{K}{s^2(s+1)}\right]=$$

$$\frac{z-1}{z}\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]=$$

$$\frac{T}{z-1}-\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}=\frac{0.018\,73K(z+0.956)}{(z-1)(z-0.818\,7)}$$

令 $z=\dfrac{1-\dfrac{T}{2}w}{1+\dfrac{T}{2}w}=\dfrac{1-0.1w}{1+0.1w}$，整理得

$$G(w)=G(z)\Big|_{z=\frac{1-0.1w}{1+0.1w}}=\frac{K\left(\dfrac{w}{300.6}+1\right)\left(1-\dfrac{w}{10}\right)}{w\left(\dfrac{w}{0.997}+1\right)}$$

$$K_v=\lim_{w\to 0}wG(w)=$$

$$\lim_{w\to 0}w\frac{K\left(\dfrac{w}{300.6}+1\right)\left(1-\dfrac{w}{10}\right)}{w\left(\dfrac{w}{0.997}+1\right)}=K\geqslant 2$$

取 $K=2$，则未校正系统在 w 域的开环传递函数为

$$G_0(w)=\frac{2\left(\dfrac{w}{300.6}+1\right)\left(1-\dfrac{w}{10}\right)}{w\left(\dfrac{w}{0.997}+1\right)}$$

令 $w=\mathrm{j}v$，得到伪频率特性

$$G(\mathrm{j}v)=\frac{2\left(\mathrm{j}\dfrac{v}{300.6}+1\right)\left(1-\mathrm{j}\dfrac{v}{10}\right)}{\mathrm{j}v\left(\mathrm{j}\dfrac{v}{0.977}+1\right)}$$

画出伪对数频率特性如图 7.18 所示，由图中可以看出未校正系统伪截止频率为 $v_c=1.4\ \mathrm{rad/s}$，(v_c 也可通过计算方法求得)，相角裕度

$$\gamma'=180^\circ+\underline{/G(\mathrm{j}v_c)}=$$

$$180^\circ+\arctan\frac{1.4}{300.6}-\arctan\frac{1.4}{10}-90^\circ-\arctan\frac{1.4}{0.997}\approx 28^\circ<45^\circ$$

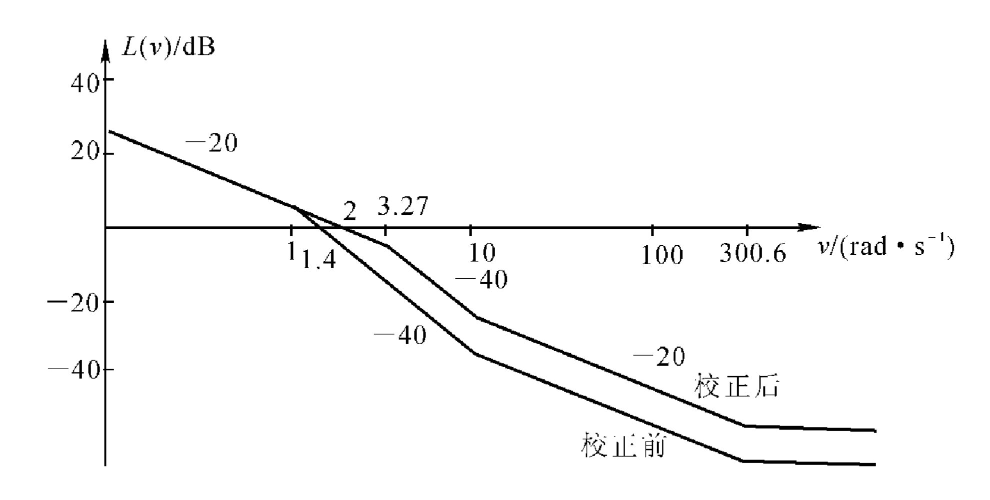


图 7.18　伪对数频率特性

可采用超前校正，取

$$D(w)=\frac{\dfrac{w}{0.997}+1}{\dfrac{w}{3.27}+1}$$

则校正后系统在 w 域的开环传递函数为

$$G(w)=\frac{2\left(\dfrac{w}{300.6}+1\right)\left(1-\dfrac{w}{10}\right)}{w\left(\dfrac{w}{0.997}+1\right)}\cdot\frac{\dfrac{w}{0.997}+1}{\dfrac{w}{3.27}+1}=$$

$$\frac{2\left(\dfrac{w}{300.6}+1\right)\left(1-\dfrac{w}{10}\right)}{w\left(\dfrac{w}{3.27}+1\right)}$$

校正后系统的伪截止频率 $v'_c=2\ \text{rad/s}$，相角裕度

$$\gamma'=180^\circ+\angle G(\text{j}v'_c)=$$

$$180^\circ+\arctan\frac{2}{300.6}-\arctan\frac{2}{10}-\arctan\frac{2}{3.27}-90^\circ\approx 48^\circ$$

满足设计的要求。

数字控制器脉冲传递函数为

$$D(z)=D(w)_{w=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}=2.718\,\frac{z-0.8187}{z-0.5071}$$

7.20　采样系统结构如图 7.19 所示，采样周期 $T=1$ s，试求 $r(t)=t$ 时最少拍系统控制器的脉冲传递函数 $D(z)$。

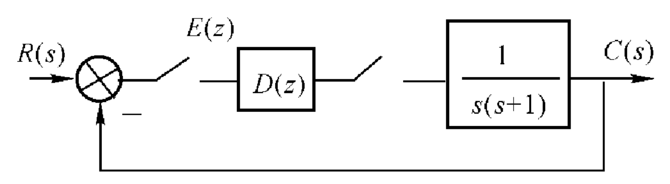


图 7.19　采样系统结构图

解　系统被控对象的脉冲传递函数为

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]=\frac{0.632z}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$r(t)=t,\quad R(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

按最少拍设计要求：

$$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^2,\ \Phi(z)=2z^{-1}-z^{-2}$$

$$D(z)=\frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)}=\frac{z^{-1}(2-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2G(z)}=$$

$$\frac{z^{-1}(2-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2\dfrac{0.632z}{(z-1)(z-0.368)}}=$$

$$\frac{3.165(z-0.5)(z-0.368)}{z(z-1)}$$

系统响应只需两拍即可进入稳态。

【点评】 (1) 最少拍系统是在确定的典型输入作用下,能以有限拍结束响应过程,且在采样时刻上无稳态误差的离散系统。

(2) 最少拍系统只对所设计的典型输入有理想的响应,对其他典型输入的适应性并不好。

(3) 最少拍系统不保证在非采样时刻无稳态误差。若要求不仅在采样时刻上输出完全能够跟踪输入,而且在非采样时刻无波纹,则要进行无波纹最少拍系统设计。

(4) 在典型输入作用下,离散系统在采样时刻无稳态误差的最少拍系统控制器可按表7.2设计。

表 **7.2**　最少拍系统的设计结果

典型输入		闭环脉冲传递函数		数字控制器 脉冲传递函数	调节时间
$r(t)$	$R(z)$	$\Phi_e(z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	t_s
$1(t)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$1-z^{-1}$	z^{-1}	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})G(z)}$	T
t	$\dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$(1-z^{-1})^2$	$2z^{-1}-z^{-2}$	$\dfrac{z^{-1}(2-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2G(z)}$	$2T$
$\dfrac{1}{2}t^2$	$\dfrac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$	$(1-z^{-1})^3$	$3z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}$	$\dfrac{z^{-1}(3-3z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^3G(z)}$	$3T$

表7.2适用于系统开环脉冲传递函数$G(z)$中不含传递延迟,且在z平面单位圆上[(1,j0)点除外]和单位圆外无开环零点和极点的情况。

7.21　采样系统结构图如图7.20所示,$G_0(s)=\dfrac{10}{s(0.1s+1)}$,$G_h(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$,采样周期$T=0.1$ s,试设计单位速度输入时最少拍无波纹系统的数字控制器$D(z)$。

解　系统广义对象的脉冲传递函数

$$G(z)=[G_h(s)G_0(s)]=\mathscr{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{10}{s(0.1s+1)}\right]=$$

$$\frac{0.368z^{-1}(1+0.717z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

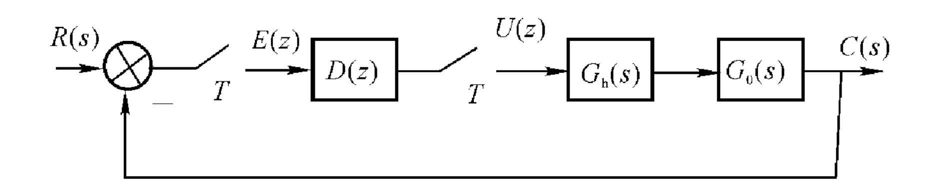


图 7.20　采样系统结构图

$G(z)$ 中含有延迟因子 z^{-1} 和 $=-0.717$ 的零点，$\Phi(z)$ 中也应含有 z^{-1} 因子和 $z=-0.717$ 的零点；$G(z)$ 中含有单位圆上 $z=1$ 的极点，$\Phi_e(z)$ 中应含有 $z=1$ 零点。由于是速度输入，$\Phi_e(z)$ 中应含 $(1-z^{-1})^2$ 因子，即包含两个 $z=1$ 零点。为了使 $\Phi_e(z)=1-\Phi(z)$ 成立，并且 $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ 有相同的阶次，可选取

$$\Phi(z)=z^{-1}(1+0.717z^{-1})(a_0+a_1z^{-1})$$

$$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^2(b_0+b_1z^{-1})$$

令
$$\Phi=1-\Phi_e(z)$$

即
$$z^{-1}(1+0.717z^{-1})(a_0+a_1z^{-1})=1-(1-z^{-1})^2(b_0+b_1z^{-1})$$

比较系数得

$$a_0=1.408,\quad a_1=-0.826,\quad b_0=1,\quad b_1=0.592$$

即
$$\Phi(z)=z^{-1}(1+0.717z^{-1})(1.408-0.826z^{-1})=$$
$$1.408z^{-1}(1+0.717z^{-1})(1-0.5866z^{-1})$$

$$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^2(1+0.592z^{-1})$$

$$D(z)=\frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)}=$$

$$\frac{1.408z^{-1}(1+0.717z^{-1})(1-0.5866z^{-1})}{(1-z^{-1})^2(1+0.592z^{-1})\dfrac{0.368z^{-1}(1+0.717z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}}=$$

$$\frac{3.826(1-0.5866z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.592z^{-1})}$$

控制器输出信号的 Z 变换与系统输入信号 Z 变换之比

$$\frac{U(z)}{R(z)}=D(z)\Phi_e(z)=$$

$$\frac{3.826(1-0.5866z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.592z^{-1})}\cdot(1-z^{-1})^2(1+0.592z^{-1})=$$

$$0.3826(1-0.5866z^{-1})(1-0.368z^{-1})(1-z^{-1})$$

当
$$R(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{0.1z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$U(z)=0.3826(1-0.5866z^{-1})(1-0.368z^{-1})(1-z^{-1})\cdot\frac{0.1z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=$$

$$\frac{0.3826(1-0.5866z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{1-z^{-1}}=$$

$$0.3826z^{-1}+0.0174z^{-2}+0.1z^{-3}+0.1z^{-4}+0.1z^{-5}+\cdots$$

$$u^*(t)=0.3826\delta(t-T)+0.0174\delta(t-2T)+$$

$$0.1\delta(t-3T)+0.1\delta(t-4T)+0.1\delta(t-5T)+\cdots$$

系统经过三拍后,即 $n\geqslant 3$,$u(nT)=0.1$。三拍之后控制器的输出为恒定值,系统输出在采样点之间无波纹。

在单位速度信号作用下,系统的输出的 Z 变换为

$$C(z)=\Phi(z)R(z)=$$

$$1.408z^{-1}(1+0.717z^{-1})(1-0.5866z^{-1})\frac{0.1z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=$$

$$0.1408z^{-2}+0.3z^{-3}+0.4z^{-4}+0.5z^{-5}+\cdots$$

三拍后过渡过程结束。

第八章

非线性控制系统分析

8.1 设一阶非线性系统的微分方程为

$$\dot{x} = -x + x^3$$

试确定系统有几个平衡点，分析平衡状态的稳定性，并作出系统的相平面图。

解 令 $\dot{x} = 0$，得

$$-x + x^3 = x(x+1)(x-1) = 0$$

系统平衡点为

$$x_e = 0, 1, -1$$

当 $x_e = 0$ 时，将 $\dot{x}$ 在此点展开为泰勒级数，可得线性化方程

$$\dot{x} = -x$$

系统在 $x_e = 0$ 处的特征方程为

$$s + 1 = 0$$

特征根为

$$s = -1$$

可见 $x_e = 0$ 是一个稳定的平衡点。

当 $x_e = -1$ 时，令 $x = x_0 - 1$ 进行坐标变换，原微分方程变为

$$\dot{x}_0 = -(x_0 - 1) + (x_0 - 1)^3 = 2x_0 - 3x_0^2 - x_0^3$$

在 $x_0 = 0$（即 $x = -1$）处进行线性化，有

$$\dot{x}_0 = 2x_0$$

特征方程为

$$s - 2 = 0$$

特征根为

$$s = 2$$

因此，$x_e = -1$ 是一个不稳定的平衡点。同理，$x_e = 1$ 也是一个不稳定的平衡点。

画出系统的相轨迹如图 8.1 所示。可见，当初使条件 $|x(0)|<1$ 时，系统会收敛到平衡点 $x_e=0$；当 $|x(0)|>1$ 时，系统会发散。

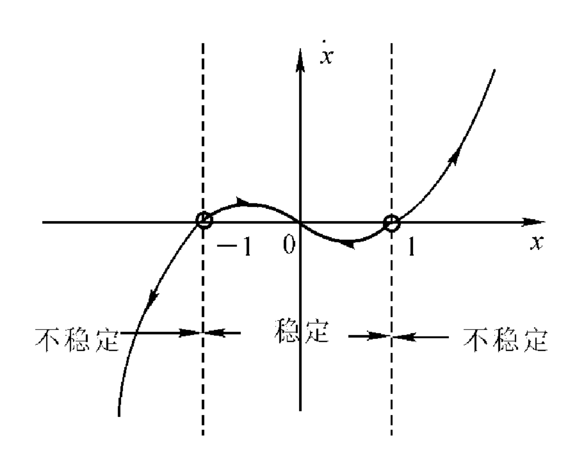


图 8.1　由方程 $\dot{x}=-x+x^3$ 描述的系统的相平面图

【点评】　平衡点为相平面上满足 $\ddot{x}=\dot{x}=0$ 的点。上例中，3 个平衡点里只有一个是稳定的平衡点，另两个为不稳平衡点。系统是一阶的，故其相轨迹只有一条，相迹点不可能在相平面上任意分布。

8.2　求下列方程的奇点，并确定奇点类型。

(1) $\ddot{x}+0.5\dot{x}+2x+x^2=0$

(2) $\ddot{x}-(1-x^2)\dot{x}+x=0$

(3) $\ddot{x}+\sin x=0$

解　(1)

$$\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}=\frac{-0.5\dot{x}-2x-x^2}{\dot{x}}$$

令 $\mathrm{d}\dot{x}=\mathrm{d}x=0$，得奇点

$$\begin{cases}x=0\\\dot{x}=0\end{cases}\quad 和 \quad \begin{cases}x=-2\\\dot{x}=0\end{cases}$$

① 在奇点 $x=0,\dot{x}=0$ 邻域，将 $\ddot{x}=f(\dot{x},x)=-0.5\dot{x}-2x-x^2$ 展开为泰勒级数，并保留一次项，有

$$\ddot{x}=f(0,0)+\left.\frac{\partial f(\dot{x},x)}{\partial\dot{x}}\right|_{\substack{x=0\\\dot{x}=0}}\dot{x}+\left.\frac{\partial f(\dot{x},x)}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\\dot{x}=0}}x=-0.5\dot{x}-2x$$

此方程即为奇点处的线性化方程，特征方程为

$$s^2+0.5s+2=0$$

特征根为

$$s_{1,2}=-0.25\pm\mathrm{j}1.39$$

故奇点 $x=0,\dot{x}=0$ 为稳定的焦点。

② 在奇点 $x=-2,\dot{x}=0$，令 $x=x_0-2$ 进行平移变换，原微分方程变为

$$\ddot{x}_0+0.5\dot{x}_0-2x_0+x_0^2=0$$

将此方程在 $x_0=0,\dot{x}_0=0$ 邻域线性化，亦即在 $x=-2,\dot{x}=0$ 邻域线性化，有

$$\ddot{x}_0=-0.5\dot{x}_0+2x_0$$

特征方程为

$$s^2+0.5s-2=0$$

特征根为

$$s_1=1.19\quad,\quad s_2=-1.69$$

故奇点 $x=-2,\dot{x}=0$ 为鞍点。

(2)
$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}=\frac{(1-x^2)\dot{x}-x}{\dot{x}}$$

令 $\mathrm{d}\dot{x}=\mathrm{d}x=0$，得奇点 $x=0,\dot{x}=0$。在奇点 $x=0,\dot{x}=0$ 邻域将原方程线性化，有

$$\ddot{x}=f(0,0)+\left.\frac{\partial f(\dot{x},x)}{\partial\dot{x}}\right|_{\substack{x=0\\ \dot{x}=0}}\dot{x}+\left.\frac{\partial f(\dot{x},x)}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ \dot{x}=0}}x=\dot{x}-x$$

特征方程为

$$s^2-s+1=0$$

特征根为

$$s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

故奇点为稳定的焦点。

(3)
$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}=\frac{-\sin x}{\dot{x}}$$

令 $\mathrm{d}\dot{x}=\mathrm{d}x=0$，得奇点 $\dot{x}=0,x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots$

当 $x=2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，令 $x=x_0+2k\pi$，原方程变为

$$\ddot{x}_0+\sin(x_0+2k\pi)=0$$

在奇点 $x_0=0,\dot{x}_0=0$（即 $x=2k\pi,\dot{x}=0$）邻域的线性化方程为

$$\ddot{x}_0=-x_0$$

特征方程为

$$s^2+1=0$$

特征根为 $s_{1,2}=\pm\mathrm{j}$，故奇点为中心点。

当 $x=(2k+1)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\dot{x}=0$ 时，令 $x=x_0+(2k+1)\pi$，原方程变为

$$\ddot{x}_0=-\sin[x_0+(2k+1)\pi]=\sin x_0$$

在奇点 $x_0=0,\dot{x}=0$（即 $x=(2k+1)\pi,\dot{x}=0$）邻域的线性化方程为

$$\ddot{x}_0 = x_0$$

特征方程为

$$s^2 - 1 = 0$$

特征根为

$$s_{1,2} = \pm 1$$

故奇点为鞍点。

【点评】　在相平面上，满足 $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ 的点称为平衡点，相平面上 $\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x} = \frac{0}{0}$，相轨迹方向不确定点称为奇点。奇点与平衡点本质上是同一概念。二阶线性系统的奇点性质与其特征根的分布相对应，对于二阶非线性系统，其奇点性质与在奇点领域内线性化方程的特征根分布相对应。

8.3　非线性系统结构如图 8.2 所示，试描绘该系统的相平面图。设输入 $r(t) = 0$。

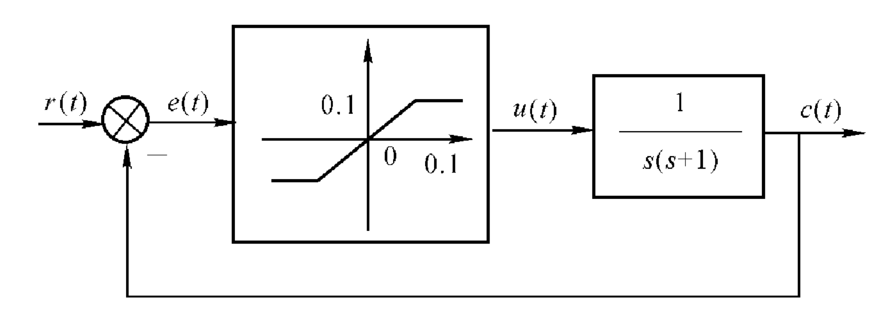


图 8.2　例 8.3 图

解　由系统结构图有

$$\ddot{c} + \dot{c} = u \quad , \quad e = -c$$

则有

$$\ddot{e} + \dot{e} = -u$$

$$u = \begin{cases} 0.1 & e > 0.1 \\ e & -0.1 \leqslant e \leqslant 0.1 \\ -0.1 & e < 0.1 \end{cases}$$

Ⅰ：当 $e > 0.1$ 时，$u = 0.1$，系统方程为

$$\ddot{e} + \dot{e} = -0.1$$

相轨迹斜率为

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\dot{e}}{\mathrm{d}e} = \frac{\ddot{e}}{\dot{e}} = \frac{-\dot{e} - 0.1}{\dot{e}} = -1 - \frac{0.1}{\dot{e}}$$

得到等倾斜线方程

$$\dot{e} = \frac{-0.1}{a+1} \quad (\text{水平线})$$

$\dot{e}$	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2
α	$-\frac{1}{2}$	0	∞	-2	$-\frac{3}{2}$

Ⅱ:当 $e<-0.1$ 时,$u=-0.1$,相轨迹斜率为

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\dot{e}}{\mathrm{d}e}=\frac{\ddot{e}}{\dot{e}}=\frac{-\dot{e}+0.1}{\dot{e}}=-1+\frac{0.1}{\dot{e}}$$

相应的等倾斜线方程为

$$\dot{e}=\frac{0.1}{\alpha+1}\quad（水平线）$$

$\dot{e}$	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2
α	$-\frac{3}{2}$	-2	∞	0	$-\frac{1}{2}$

Ⅲ:当 $-0.1\leqslant e\leqslant 0.1$ 时,$u=e$,相轨迹斜率为

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\dot{e}}{\mathrm{d}e}=\frac{\ddot{e}}{\dot{e}}=\frac{-\dot{e}-e}{\dot{e}}$$

β	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	∞
α	-1	0	$-\infty$	-4	-2	-1

等倾斜线方程为

$$\dot{e}=-\frac{1}{\alpha+1}e=\beta e$$

由 3 个区域的等倾斜线,在给定起始点后,可以描绘出相轨迹,如图 8.3 所示。

8.4　试确定下列方程的奇点及其类型,画出其相平面图的大致图形。

(1)$\ddot{x}+x+\mathrm{sign}\dot{x}=0$;

(2)$\ddot{x}+|x|=0$ 。

解　(1) 系统方程可写为

$$\begin{cases}\ddot{x}+x+1=0 & \dot{x}>0 & \text{Ⅰ 区}\\ \ddot{x}+x-1=0 & \dot{x}<0 & \text{Ⅱ 区}\end{cases}$$

系统的奇点

Ⅰ:　$x=-1,\quad \dot{x}=0$

Ⅱ:　$x=1,\quad \dot{x}=0$

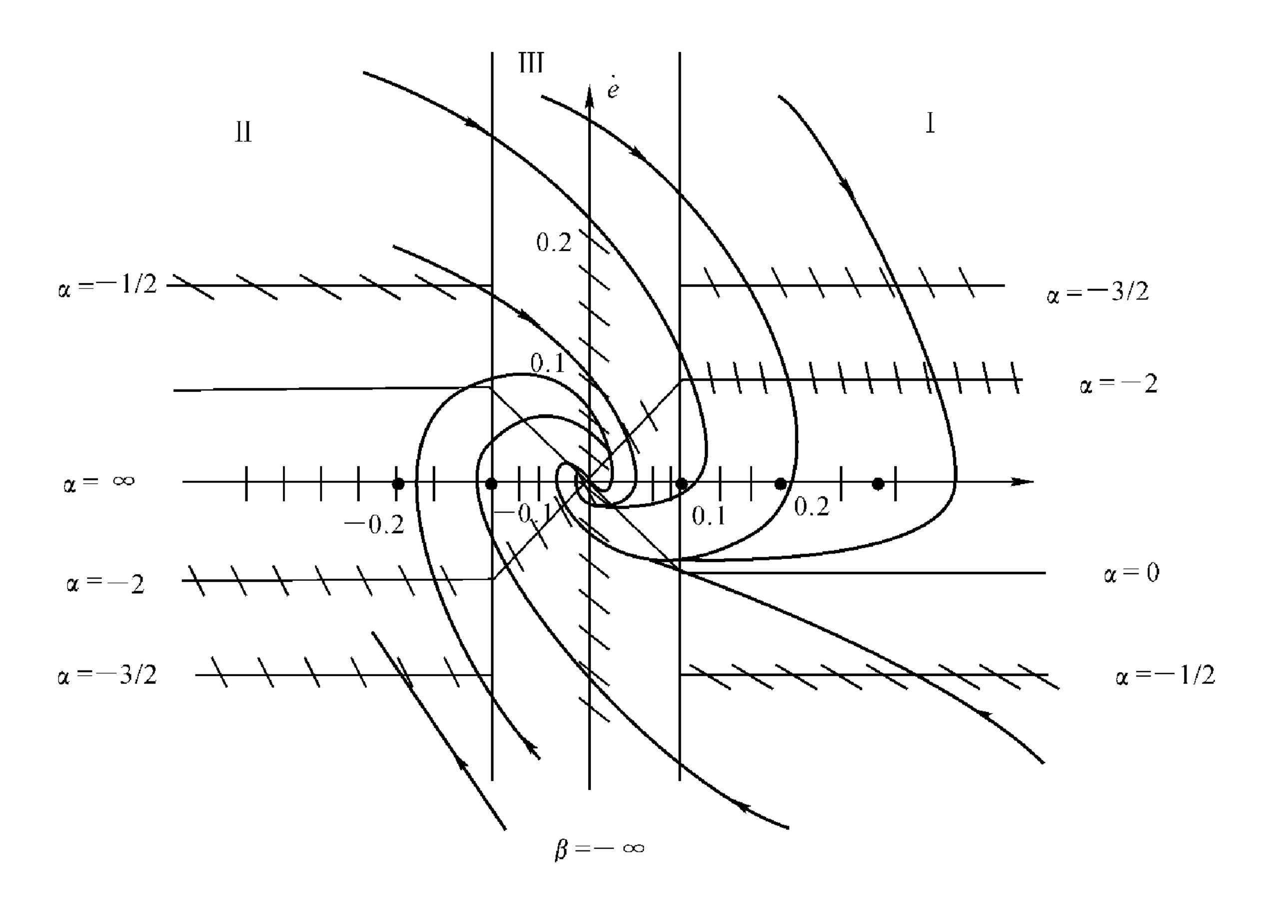


图 8.3　相轨迹图

系统特征方程均为 $x^2+1=0$,特征根均为 $s_{1,2}=\pm \mathrm{j}$,故两奇点均为中心点。画出系统相平面图如图8.4(a) 所示。由图可见,系统的响应运动最终会收敛到$(-1,1)$ 之间。奇点在$(-1,1)$ 之间连成一条线,称之为奇线。

(2) 系统方程可写为

$$\begin{cases}\ddot{x}+x=0 & x\geqslant 0 \quad \text{Ⅰ 区}\\ \ddot{x}-x=0 & x<0 \quad \text{Ⅱ 区}\end{cases}$$

Ⅰ:　奇点:　$x=0,\dot{x}=0$

特征方程:　$s^2+1=0$,　$s_{1,2}=\pm \mathrm{j}$(中心点)

Ⅱ:　奇点:　$x=0,\dot{x}=0$

特征方程:　$s^2-1=0$,　$s_{1,2}=\pm 1$(鞍点)

画出系统相平面图如图 8.4(b) 所示。由图可见,系统的自由响应总是会向 x 轴负方向发散,系统不稳定。

8.5　已知非线性系统结构图及非线性环节特性如图 8.5(a),(b) 所示。系统原来处于静止状态,$0<\beta<1$,$r(t)=-R\cdot 1(t)$,$R>a$。分别画出没有局部反馈和有局部反馈时系统相轨迹的大致图形。

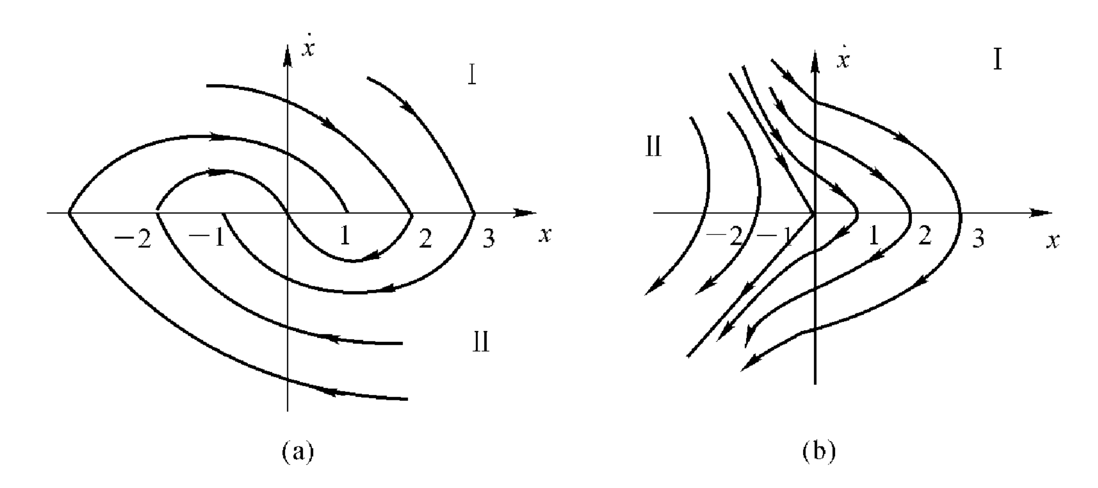


图 8.4 相轨迹图

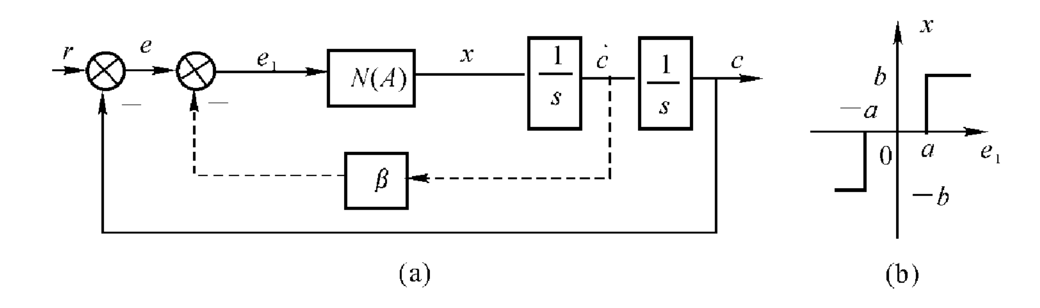


图 8.5 非线性系统及非线性环节特性

解 (1) 没有局部反馈时 $e_1 = e$,由系统结构图有系统方程

$$\ddot{c} = x = \begin{cases} 0 & |e| < a \\ b & e > a \\ -b & e < -a \end{cases}$$

因为

$$e = r - c, \quad r(t) = -R \times 1(t), \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\ddot{e} = \ddot{r} - \ddot{c} = -\ddot{c}$$

所以在 $e-\dot{e}$ 平面上方程变为

$$\ddot{e} = -\ddot{c} = -x$$

即

$$\ddot{e} = \begin{cases} 0 & |e| < a & \text{I 区} \\ -b & e > a & \text{II 区} \\ b & e < -a & \text{III 区} \end{cases}$$

因为 $\ddot{e} = \dot{e}\dfrac{d\dot{e}}{de}$,所以

I 区: $\dot{e}\dfrac{d\dot{e}}{de} = 0, \quad \dot{e}d\dot{e} = 0, \quad \int\dot{e}d\dot{e} = 0,$

$$\frac{\dot{e}^2}{2}=c,\quad \dot{e}^2=2c \qquad (c\ \text{为任意常数})$$

有 $\dot{e}=\pm\sqrt{2c}$,相轨迹为一族水平线。

Ⅱ 区：
$$\dot{e}\frac{\mathrm{d}\dot{e}}{\mathrm{d}e}=-b,\quad \dot{e}\mathrm{d}\dot{e}=-b\mathrm{d}e,\quad \int\dot{e}\mathrm{d}\dot{e}=\int -b\mathrm{d}e,$$
$$\frac{\dot{e}^2}{2}=-be+c \qquad (c\ \text{为任意常数})$$

相轨迹为一族抛物线,开口向左。

Ⅲ 区：
$$\dot{e}\frac{\mathrm{d}\dot{e}}{\mathrm{d}e}=b,\quad \dot{e}\mathrm{d}e=b\mathrm{d}e,\quad \int\dot{e}\mathrm{d}\dot{e}=\int b\mathrm{d}e,$$
$$\frac{1}{2}\dot{e}^2=b+c \qquad (c\ \text{为任意常数})$$

相轨迹为一族抛物线,开口向右。

开关线方程 $|e|=a$,即 $e=a$ 和 $e=-a$,它们是 e-$\dot{e}$ 平面两条铅直线。初始位置

$$e(0_+)=r(0_+)-c(0_+)=-R-0=-R$$
$$\dot{e}(0_+)=\dot{r}(0_+)-\dot{c}(0_+)=0-0=0$$

相轨迹如图 8.6(a) 所示。

(2) 有局部负反馈时,系统方程为

$$\ddot{e}=-x$$

$$\ddot{e}=\begin{cases}0 & |e_1|<a \quad \text{Ⅰ 区}\\ -b & |e_1|>a \quad \text{Ⅱ 区}\\ b & |e_1|<a \quad \text{Ⅲ 区}\end{cases}$$

系统方程没变,方程所表示的图形也没变,只是分区的条件变了,开关线方程是 $e_1=a$,$e_1=-a$。要画 e-$\dot{e}$ 平面上的相轨迹,开关线方程必须消去中间变量 e_1,用 e 和 $\dot{e}$ 来表示。由结构图可知

$$e_1=e-\beta\dot{c}=e+\beta\dot{e}$$

令 $e_1=a$,即

$$e+\beta\dot{e}=a\quad,\quad \dot{e}=-\frac{1}{\beta}e+\frac{a}{\beta}$$

令 $e_1=-a$,即

$$e+\beta\dot{e}=-a\quad,\quad \dot{e}=-\frac{1}{\beta}e-\frac{a}{\beta}$$

开关线方程为两条斜率为 $-\dfrac{1}{\beta}$,在纵坐标上截距分别为 $\dfrac{a}{\beta}$ 和 $-\dfrac{a}{\beta}$ 的斜线。当 $\dot{e}=0$ 时 e 分别等于 a 和 $-a$。

相轨迹起始点的位置仍为

$$\dot{e}=0 \quad , \quad e=-R$$

可见,系统自由响应为振荡收敛过程,如图 8.6(b) 所示。

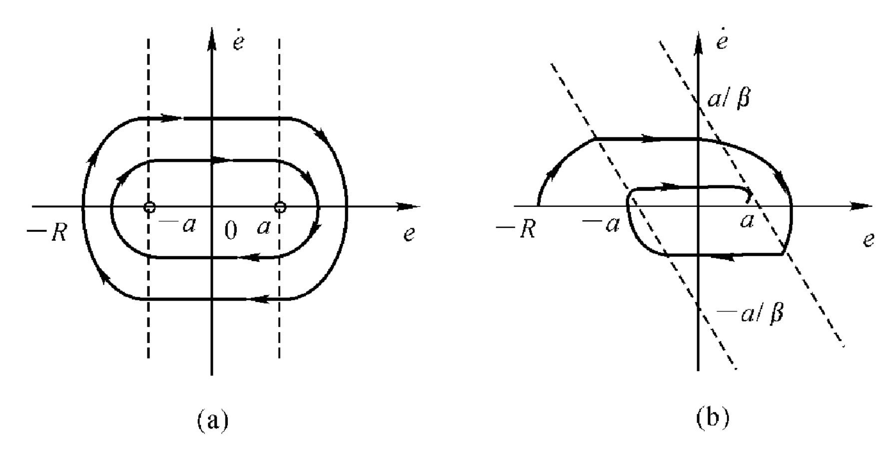


图 8.6　相轨迹图

8.6　已知某线性典型二阶系统在单位阶跃函数作用下的相轨迹如图 8.7(a) 所示。试大致画出对应的过渡过程曲线,并确定系统的传递函数。已知相平面图上(1.64,0) 点对应的时间为 3.63 s。

解　对于典型二阶系统,根据相轨迹图上的 x 和 $\dot{x}$ 的变化情况,可以画出过渡过程曲线大致形状,如图 8.7(b) 所示。

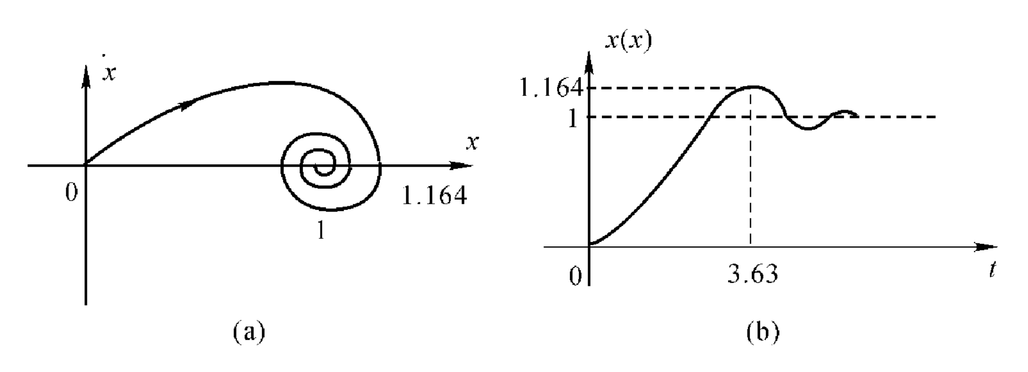


图 8.7　二阶系统相平面图及过渡过程曲线

从图 8.7(a) 可见,x 变化最大值为 1.164,对应时间为 3.63 s,对应(b) 中第一个峰值为 1.164,峰值时间 $t_p=3.63$,超调量 $\sigma\%=16.4\%$。

$$\begin{cases} \sigma\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = 16.4\% \\ t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 3.63 \end{cases}$$

解得

$$\xi=0.5, \quad \omega_n=1$$

系统传递函数

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{s^2+s+1}$$

8.7　将图中非线性系统结构图简化成非线性部分 $N(A)$ 和等效的线性部分 $G(s)$ 相串联的单位反馈控制系统结构图，并写出线性部分的传递函数 $G(s)$。

解　此类题可以用 3 种方法求解。

(1) 对图 8.8(a) 所示系统

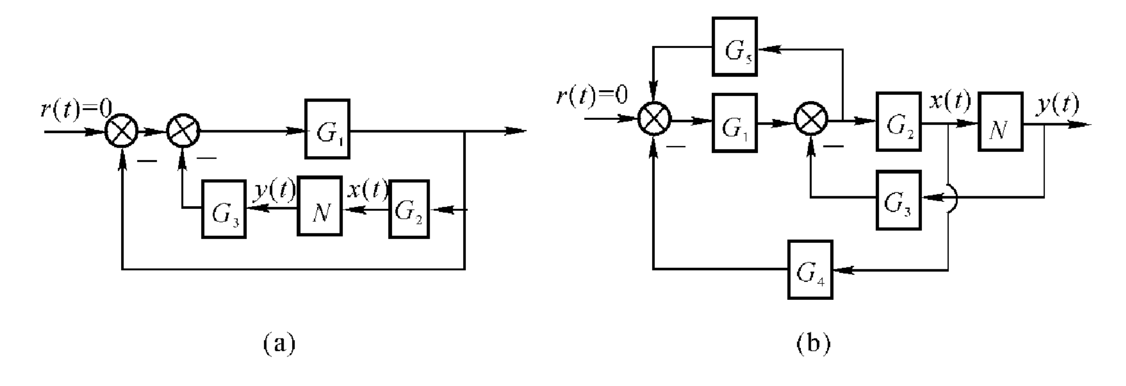


图 8.8　非线性系统结构图

解法 1　用结构图等效变换法(见图 8.9)。

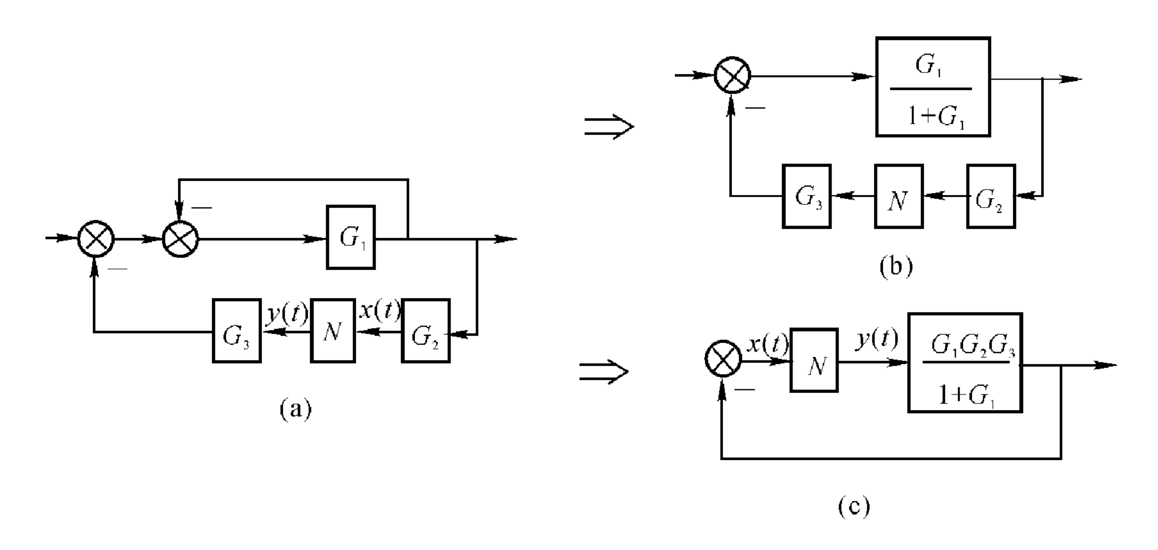


图 8.9　结构图等效化简过程

解法 2　用梅逊增益公式。

如图 8.10 所示，将非线性部分 $N(A)$ 的输出 y 和输入 x 分别当做线性部分的输入和负输出，直接利用梅逊增益公式得

$$G(s)=\frac{-X(s)}{Y(s)}=\frac{G_1G_2G_3}{1+G_1}$$

解法 3　先将 $N(A)$ 看做线性环节，求原系统的闭环传递函数 $\Phi(s)$，令其分母为零，与非线性系统标准形式（$N(A)$ 与 $G(s)$ 串联见图 8.10）比较即可得出等效线性部分传递函数 $G(s)$。

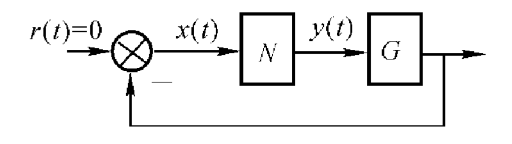


图 8.10　系统结构图

依图 8.8(a) 有

$$\Phi(s) = \frac{G_1}{1 + G_1 + G_1 G_2 G_3 N}$$

令

$$1 + G_1 + G_1 G_2 G_3 N = 0$$

$$\frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1} N = -1$$

所以

$$G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1}$$

(2) 对图 8.8(b) 所示系统

解法 1　用结构图等效变换法（见图 8.11）。

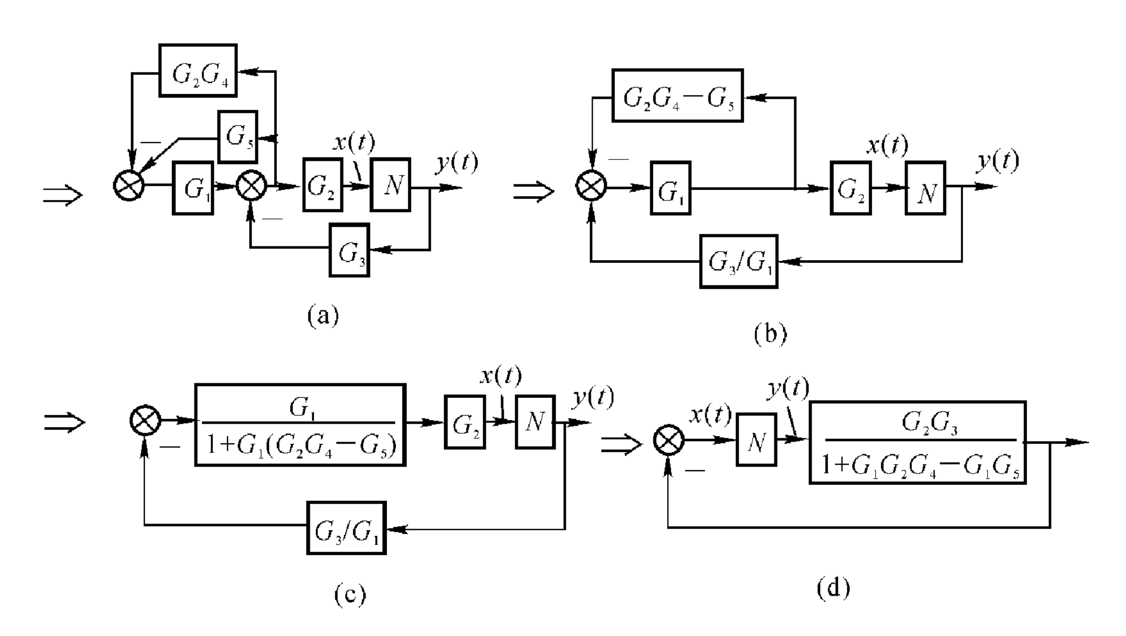


图 8.11　结构图等效化简过程

解法 2　用梅逊增益公式。

$$G(s) = \frac{-X(s)}{Y(s)} = \frac{G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_4 - G_1 G_5}$$

解法 3 同图 8.8(a) 系统的解法 3。

$$\Phi(s) = \frac{G_1G_2N}{1 + G_2G_3N + G_1G_2G_4 - G_1G_5}$$

令

$$1 + G_1G_3N + G_1G_2G_4 - G_1G_5 = 0$$

$$G_2G_3N = -(1 + G_1G_2G_4 - G_1G_5)$$

$$\frac{G_2G_3}{1 + G_1G_2G_4 - G_1G_5}N = -1$$

所以

$$G(s) = \frac{G_2G_3}{1 + G_1G_2G_4 - G_1G_5}$$

【点评】 应用描述函数法分析非线性系统的稳定性和自振时，需将整个非线性系统表示为非线性部分 $N(A)$ 与等效线性部分 $G(s)$ 相串联的标准形式(见图 8.10)。其中等效线性部分传递函数 $G(s)$ 可用上例中 3 种方法求得。研究非线性系统的稳定性和自振与原系统的输入端(输入为零)、输出端在什么位置无关。系统若出现自振，则各信号口的自振频率都一样，而自振振幅 A 则是特指非线性部分输入口处的振幅，若要求其他某处的振幅，可以利用线性系统频率特性概念由 A 向该点推算。

8.8 3 个非线性系统的非线环节一样，线性部分分别如下，用描述函数法分析时哪个系统分析的准确度高？

(1) $G(s) = \dfrac{1}{s(0.1s+1)}$；

(2) $G(s) = \dfrac{2}{s(s+1)}$；

(3) $G(s) = \dfrac{2(1.5s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)}$。

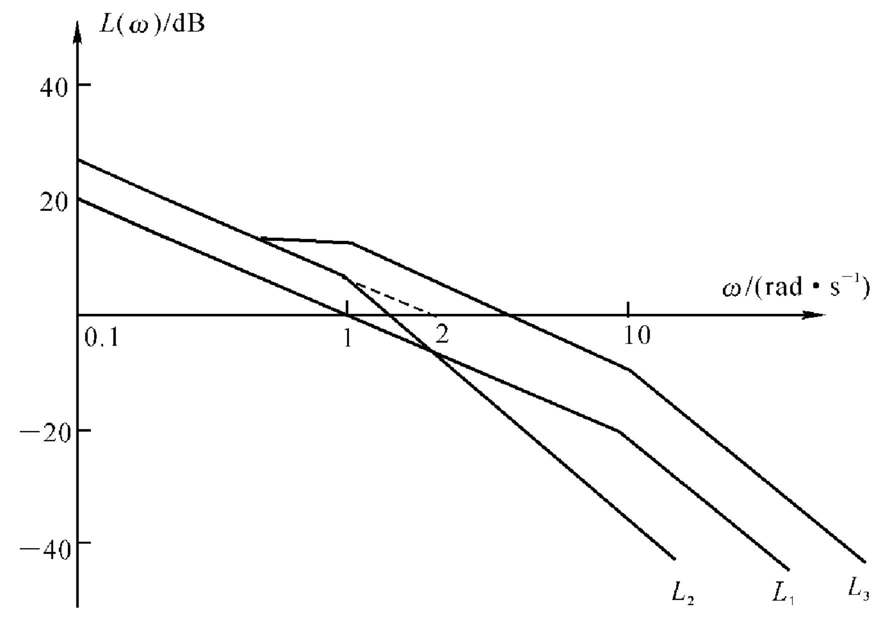


图 8.12 Bode 图

解　分别作出 3 个系统线性部分的对数幅频特性，如图 8.12 所示。由图可见，第二个系统线性部分 L_2 的高频段衰减最快，低通滤波特性最好，所以系统(2) 用描述函数法分析结果准确程度高。

【点评】 用描述函数法分析非线性系统时，要求线性部分具有良好的低通滤波特性。低通滤波特性越好，用描述函数法分析所得结果的准确程度越高。

8.9　设某非线性环节的输入输出特性为

$$y = b_1 x + b_3 x^3 + b_5 x^5 + b_7 x^7 + \cdots$$

式中 x 为非线性环节的输入，y 为其输出，试求该环节的描述函数。

解　设 $x = A\sin\omega t$，代入上式有

$$y(t) = b_1 A\sin\omega t + b_3 A^3 \sin^3\omega t + b_5 A^5 \sin^5\omega t + \cdots$$

由于 $y(t)$ 是奇函数，故有

$$A_1 = 0$$

而

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[b_1 A\sin^2\omega t + b_3 A^3 \sin^4\omega t + b_5 A^5 \sin^6\omega t + \cdots]\mathrm{d}\omega t$$

式中

$$\int_0^{\pi}\sin^2\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) = \left(\frac{1}{2}\omega t - \frac{1}{4}\sin^2\omega t\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

根据积分公式

$$\int\sin^n u\,\mathrm{d}u = -\frac{\sin^{n-1}u\cos u}{n} + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}u\,\mathrm{d}u$$

可以求得

$$\int_0^{\pi}\sin^4\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) = -\frac{\sin^3\omega t\cos\omega t}{4}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi}\sin^2\omega t\,\mathrm{d}\omega t = \frac{3}{4}\times\frac{\pi}{2}$$

同理有

$$\int_0^{\pi}\sin^6\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) = \frac{5}{8}\times\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi}\sin^8\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) = \frac{7}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{\pi}{2}$$

将以上结果代入 B_1，可得

$$B_1 = \frac{2b_1 A}{\pi}\times\frac{\pi}{2} + \frac{2b_3 A^3}{\pi}\times\frac{3}{4}\times\frac{\pi}{2} + \frac{2b_5 A^5}{\pi}\times\frac{5}{8}\times\frac{\pi}{2} + \frac{2b_7 A^7}{\pi}\times\frac{7}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{\pi}{2} + \cdots$$

该环节的描述函数为

$$N(A) = b_1 + \frac{3}{4}b_3A^2 + \frac{5}{8}b_5A^4 + \frac{35}{64}b_7A^6 + \cdots$$

【点评】　描述函数分析法是线性系统频率响应分析方法的推广。它是基于谐波等效线性化技术的一种简易近似分析设计方法。这种方法的实质是运用谐波线性化的方法，将非线性环节或系统的特性线性化，然后就可以用线性系统频率特性分析方法的一些结论来近似研究非线性系统。这就要求非线性特性具有奇对称性，非线性环节中一次谐波分量的幅值占优。

8.10　一非线性系统中非线性特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{4}{\pi A}e^{-j\alpha}\quad,\quad \alpha = \arcsin\frac{1}{A}, A \geqslant 1$$

线性部分的频率特性如图 8.13 所示。试定性分析非线性系统的运动规律。

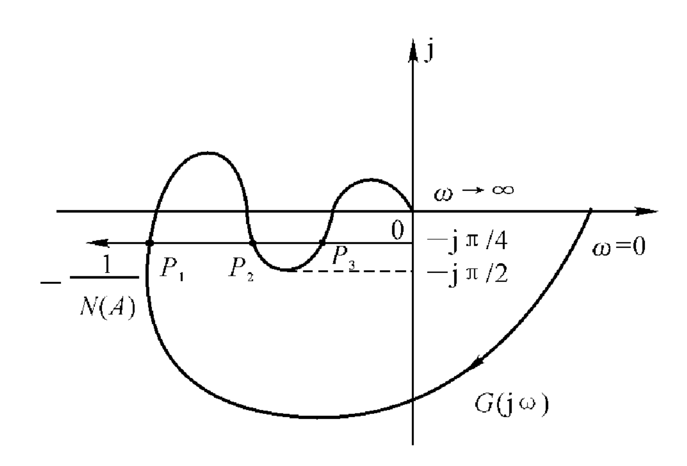


图 8.13　$-\frac{1}{N(A)}$ 和 $G(j\omega)$ 曲线

解
$$N(A) = \frac{4}{\pi A}e^{-j\alpha}$$

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4}e^{j\alpha} = -\frac{\pi A}{4}(\cos\alpha + j\sin\alpha)$$

由 $\alpha = \arcsin\frac{1}{A}$，即 $\sin\alpha = \frac{1}{A}$，有

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{A^2}} = \frac{\sqrt{A^2-1}}{A}$$

因此有

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi}{4}\sqrt{A^2-1} - j\frac{\pi}{4}$$

当 A 从 $1\to+\infty$ 时，$\mathrm{Re}\left[-\frac{1}{N(A)}\right]$ 从 $0\to-\infty$，而 $I_m\left[-\frac{1}{N(A)}\right]$ 为 $-\frac{\pi}{4}$ 恒定不变。画出 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线，可见 $-\frac{1}{N(A)}$ 与 $G(j\omega)$ 有 3 个交点，P_1，P_2 和 P_3。设其对应的频率分别为 ω_1，ω_2 和 ω_3，且 $\omega_1<\omega_2<\omega_3$；对应振幅为 A_1，A_2，A_3，

有 $A_1 > A_2 > A_3$。

系统在 P_1 和 P_3 点做稳定的周期运动，故 P_1 和 P_3 是自振点，而 P_2 点不是自振点。当初始振幅 $A > A_2$ 时，产生振幅为 A_1，频率为 ω_1 的自持振荡；当初始振幅 $1 < A < A_2$ 时，产生振幅为 A_3，频率为 ω_3 的自持振荡。P_1 点的自振频率比较低，振幅比较大，P_3 点的自振频率比较高，振幅比较小。

8.11　试用描述函数法分析图 8.14 所示系统的稳定性，如果存在自振，求出自振的振幅和频率（设 $M = 10$）。

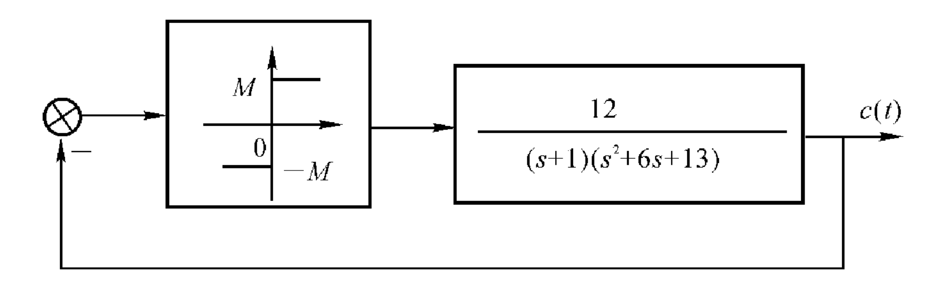


图 8.14　非线性系统结构图

解　理想继电特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \qquad -\frac{1}{N(A)} = \frac{-\pi A}{4M}$$

概略画出系统线性部分的幅相特性曲线 $G(\mathrm{j}\omega)$ 和 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 曲线，如图 8.15 所示。可见系统一定存在稳定的自振。由系统自振的必要条件

$$G(\mathrm{j}\omega)N(A) = -1$$

得

$$-N(A) = \frac{1}{G(\mathrm{j}\omega)}$$

即

$$-\frac{4M}{\pi A} = \frac{(1+\mathrm{j}\omega)(13-\omega^2+\mathrm{j}6\omega)}{12} = \frac{13-7\omega^2+\mathrm{j}\omega(19-\omega^2)}{12}$$

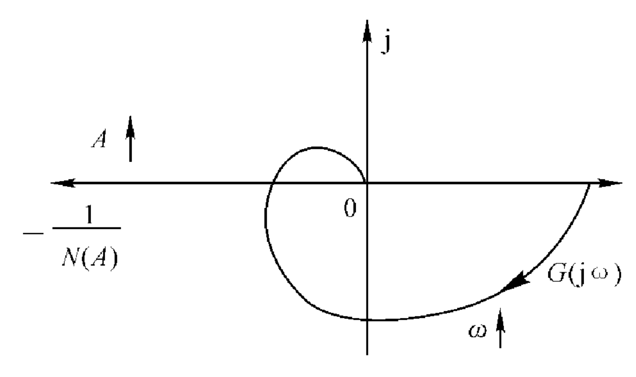


图 8.15　$-\dfrac{1}{N(A)}$ 和 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线

令方程两端实、虚部分别相等，得

$$\begin{cases}\dfrac{7\omega^2-13}{12}=\dfrac{4\times 10}{\pi A}\\ 19-\omega^2=0\end{cases}$$

解得
$$\omega=\sqrt{19}=4.36,\quad A=1.273$$

8.12　已知非线性系统如图8.16所示，其中非线性特性为具有死区的继电特性，饱和输出 $b=3$，死区 $a=1$。

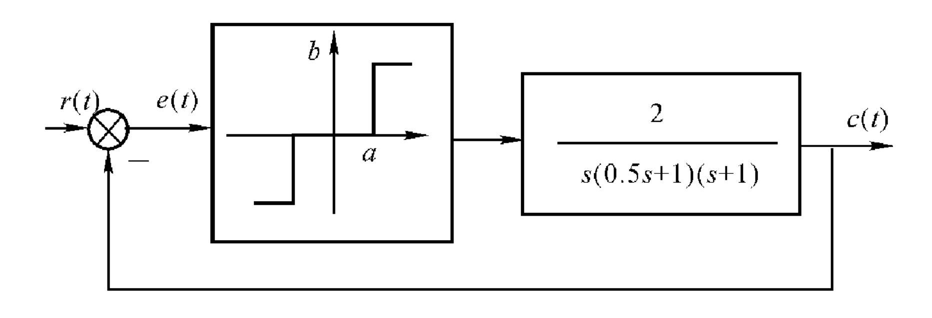


图 8.16　含继电器特性的非线性系统

(1) 试分析系统的稳定性；

(2) 若使系统不产生自持振荡，非线性特性参数 a，b 应怎样调整；

(3) 在 $b=3$，$a=1$，线性部分增益为2的条件下，加入校正装置，消除自持振荡，使系统稳定。

解　(1) 具有死区的继电特性的描述函数为

$$N(A)=\frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2},\quad A\geqslant a$$

$$-\frac{1}{N(A)}=\frac{-\pi A}{4b\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{A}\right)^2}}=\frac{-\pi A^2}{4b\sqrt{A^2-a^2}}$$

当 $A\to a$ 时，$-\dfrac{1}{N(A)}\to-\infty$；当 $A\to\infty$ 时，$-\dfrac{1}{N(A)}\to-\infty$，$-\dfrac{1}{N(A)}$ 必然存在极值。

$$\frac{\mathrm{d}\left[-\dfrac{1}{N(A)}\right]}{\mathrm{d}A}=-\frac{\pi}{4b}\,\frac{A^3-2Aa^2}{(A^2-a^2)\sqrt{A^2-a^2}},\quad A\geqslant a$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\left[-\dfrac{1}{N(A)}\right]}{\mathrm{d}A}=0$，得

$$A=\sqrt{2}a\quad,\quad -\frac{1}{N(A)}\bigg|_{A=\sqrt{2}a}=-\frac{\pi a}{2b}$$

将 $a=1,b=3$ 代入,则 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 的极值发生在 $A=\sqrt{2}$ 处,其值为

$$-\frac{\pi\times 1}{2\times 3}=-\frac{\pi}{6}=-0.523$$

负倒描述函数随 A 的增加从 $-\infty$ 处沿着负实轴从左到右,到达极值 $-\dfrac{\pi}{6}$ 之后又沿着负实轴从右到左趋于 $-\infty$,如图 8.17 所示。

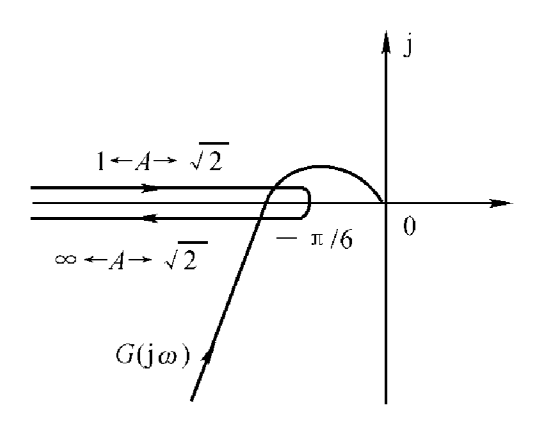


图 8.17 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 和 $G(j\omega)$ 曲线

由线性部分传递函数

$$G(s)=\frac{2}{s(0.5s+1)(s+1)}$$

求得

$$G(j\omega)=\frac{2}{j\omega(0.5j\omega+1)(j\omega+1)}=\frac{2[-1.5\omega-j(1-0.5\omega^2)]}{\omega(0.25\omega^4+1.25\omega^2+1)}$$

令线性部分频率响应 $G(j\omega)$ 的虚部为 0

$$I_m[G(j\omega)]=\frac{-2(1-0.5\omega^2)}{\omega(0.25\omega^4+1.25\omega^2+1)}=0$$

求得 $\omega=\sqrt{2}$,代入 $\mathrm{Re}[G(j\omega)]$ 中,求得

$$\mathrm{Re}[G(j\omega)]\Big|_{\omega=\sqrt{2}}=\frac{-3}{0.25\omega^4+1.25\omega^2+1}\Big|_{\omega=\sqrt{2}}=-\frac{1}{1.5}=-0.667$$

即 $G(j\omega)$ 曲线与负实轴交点为 $(-0.667,j0)$,由于 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 轨迹位于负实轴上 $-0.523\sim-\infty$ 之间,所以 $G(j\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 必然相交,且在同一坐标点 $(-0.667,j0)$ 上对应着负倒描述函数 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 的两个不同 A 值。

由自振条件 $G(j\omega)=-\dfrac{1}{N(A)}$,有

$$-\frac{1}{1.5}=\frac{-\pi A}{12\sqrt{1-\left(\frac{1}{A}\right)^2}}$$

解得　　$A_1=1.11,\quad A_2=2.3$

交点处两个不同的 A 值对应着振幅不同、频率相同的两个周期运动。$A_1=1.11$ 处，随着 A 增加，$-\frac{1}{N(A)}$ 由稳定区进入不稳定区，因此这个周期运动是不稳定的。$A_2=2.3$ 处，随着 A 增加，$-\frac{1}{N(A)}$ 由不稳定区进入稳定区，这个周期运动是稳定的，即系统在此处产生自持振荡。因此，系统中实际存在的自持振荡振幅为 $A=2.3$，频率为 $\omega=\sqrt{2}$ rad/s。

(2) 为了使系统不产生自持振荡，必须保证 $G(j\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(A)}$ 不相交，改变 $G(j\omega)$ 和 $-\frac{1}{N(A)}$ 都能达到这个目的。

$-\frac{1}{N(A)}$ 的极值，即负实轴上的拐点为 $-\frac{\pi a}{2b}$，为使 $-\frac{1}{N(A)}$ 与 $G(j\omega)$ 不相交，应使

$$-\frac{\pi a}{2b}<-\frac{1}{1.5}$$

可得

$$\frac{a}{b}<\frac{1.5\pi}{2}=2.36$$

若取 $\frac{a}{b}=2$，则可保证 $-\frac{\pi a}{2b}=-\frac{\pi}{4}=-0.786<-\frac{1}{1.5}$ 不产生自振。此时，若保持 $b=3$，则继电器死区参数 a 调整到 1.5。

(3) 具有死区的继电器的负倒描述函数在负实轴上的拐点位于 $-\frac{\pi a}{2b}$，若将拐点折算到 $(-1,j0)$ 点，可利用 Bode 图进行校正，使系统稳定，令 $-\frac{\pi a}{2b}=-1$，有

$$\frac{b}{a}=\frac{\pi}{2}=1.57$$

若取 $a=1$ 时 $b=1.57$，将 $k=\frac{3}{1.57}=1.91$ 折算到线性部分，则线性部分的等效传递函数为

$$kG(s)=\frac{1.91\times 2}{s(0.5s+1)(s+1)}$$

可画出对数幅频特性如图 8.18 所示。可借用线性系统校正的方法进行综合校正。如果只要求稳定，对相对性没有太高要求，可采用一级迟后校正，校正装置的传递函数可取为

$$D(s) = \frac{5s+1}{40s+1}$$

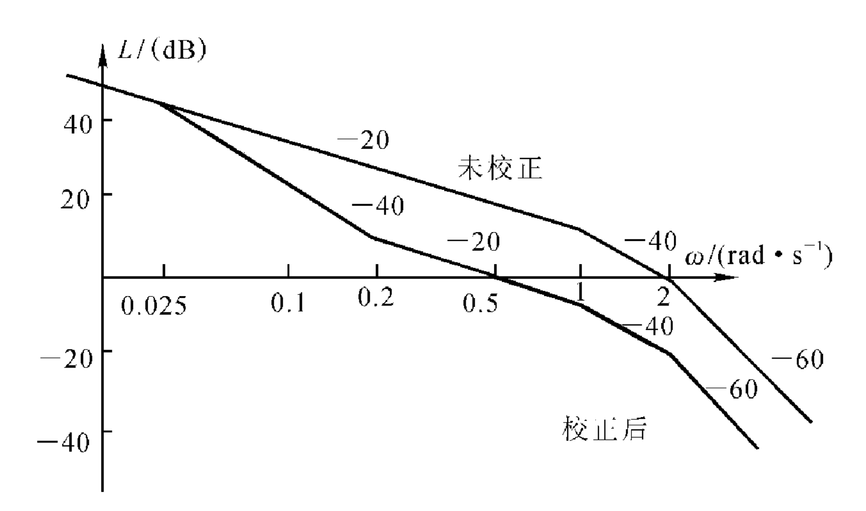


图 8.18 Bode 图

校正后系统线性部分实际的传递函数为

$$D(s)G(s) = \frac{2(5s+1)}{s(40s+1)(0.5s+1)(s+1)}$$

$D(j\omega)G(j\omega)$ 曲线与 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 不相交。

8.13 非线性系统结构图如图 8.19(a) 所示，$M=1$。要使系统产生振幅 $A=4$，频率 $\omega=1$ 的自振运动，试确定参数 K,τ 的值。

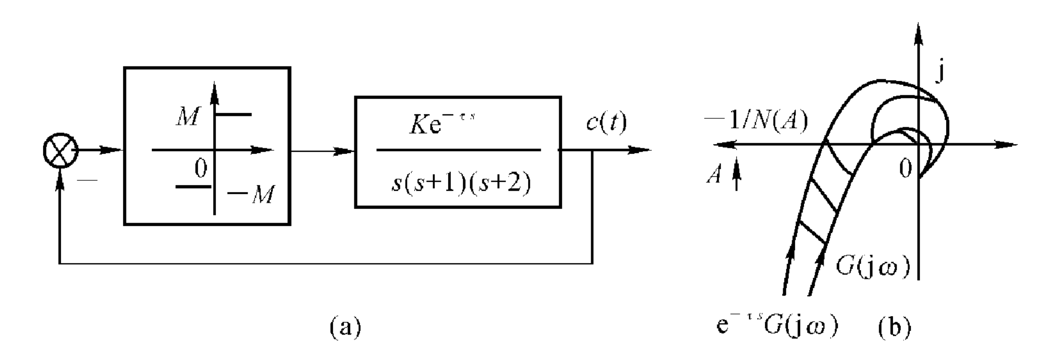


图 8.19 例 8.13 图

解 画出 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如图 8.19(b) 所示，当 K 改变时，只影响自振振幅 A，不改变自振频率 ω；而当 $\tau\neq 0$ 时，会使自振频率降低，幅值增加。因此可以调节 K,τ 大小实现要求的自振运动。

由自振条件 $N(A)G(\mathrm{j}\omega)=-1$，有

$$\frac{4M}{\pi A}\times\frac{K\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega)(2+\mathrm{j}\omega)}=-1$$

$$\frac{4MK\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{\pi A}=-\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega)(2+\mathrm{j}\omega)=3\omega^2-\mathrm{j}\omega(2-\omega^2)=$$

$$\omega\sqrt{4+5\omega^2+\omega^4}\angle-\arctan\frac{2-\omega^2}{3\omega}$$

代入 $M=1,A=4,\omega=1$ 并比较方程两边模和相角，得

$$\begin{cases}\dfrac{K}{\pi}=\sqrt{10}\\ \tau=\arctan\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

即

$$K=\sqrt{10}\pi=9.93$$

$$\tau=\arctan\frac{1}{3}=0.322$$

8.14　设非线性系统结构如图 8.20(a) 所示。分析系统运动并计算自振参数。

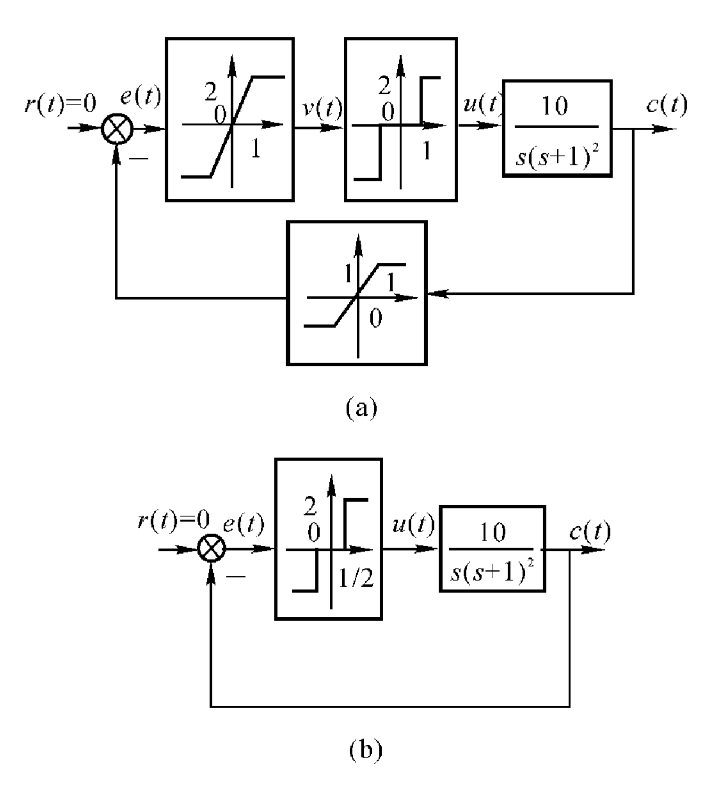


图 8.20　例 8.14 图

解　首先将 3 个串联在一起的非线性环节进行等效合并。由于反馈通道饱和特性与前向通道饱和特性同时进入饱和状态，所以反馈通道的非线性环

节实际上不起作用，可将其去掉。将前向通道两个非线性环节合并，系统结构图等效变换为图 8.20(b) 所示形式。

$$v=\begin{cases}2 & e>1\\ 2e & |e|\leqslant 1\\ -2 & e<-1\end{cases}$$

$$u=\begin{cases}2 & v>1\rightarrow e>\dfrac{1}{2}\\ 0 & |v|\leqslant 1\rightarrow |e|\leqslant\dfrac{1}{2}\\ -2 & v<-1\rightarrow e<-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$N(A)=\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{h}{A}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{N(A)}=\frac{-\pi A^2}{4M}\frac{1}{\sqrt{A^2-h^2}}$$

$-\dfrac{1}{N(A)}$ 在 $A=\sqrt{2}h$ 处有极值，为

$$-\frac{1}{N(A)}\bigg|_{A=\sqrt{2}h}=-\frac{\pi h}{2M}=-\frac{\pi}{8}$$

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{10}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega)^2}$$

令 $\angle G(\mathrm{j}\omega)=-\pi$，得

$$-\frac{\pi}{2}-2\arctan\omega=-\pi$$

$$\omega=1$$

$$|G(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=1}=-5$$

$-\dfrac{1}{N(A)}$ 与 $G(\mathrm{j}\omega)$ 相交，系统存在自振，如图 8.21 所示。

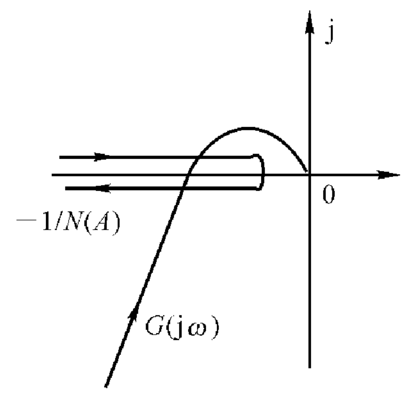


图 8.21 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 和 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线

由 $-\dfrac{1}{N(A)}=-5$ 得

$$A=12.72,\quad \omega=1$$

【点评】　本质上讲，描述函数只适用于分析结构图中只有一个(或等效一个)非线性环节的非线性系统。当两个或两个以上非线性环节串联时，必须进行等效合并。串联合并后的非线性环节的描述函数一般不是原非线性描述函数的乘积，要从其输入输出关系上进行分析，等效合并。注意非线性环节串联时不能随便调换位置。

8.15　设非线性系统如图8.22(a)所示，讨论参数 T 对系统自振的影响。若 $T=0.25$ s，试求出输出信号 $c(t)$ 振荡的振幅和频率。

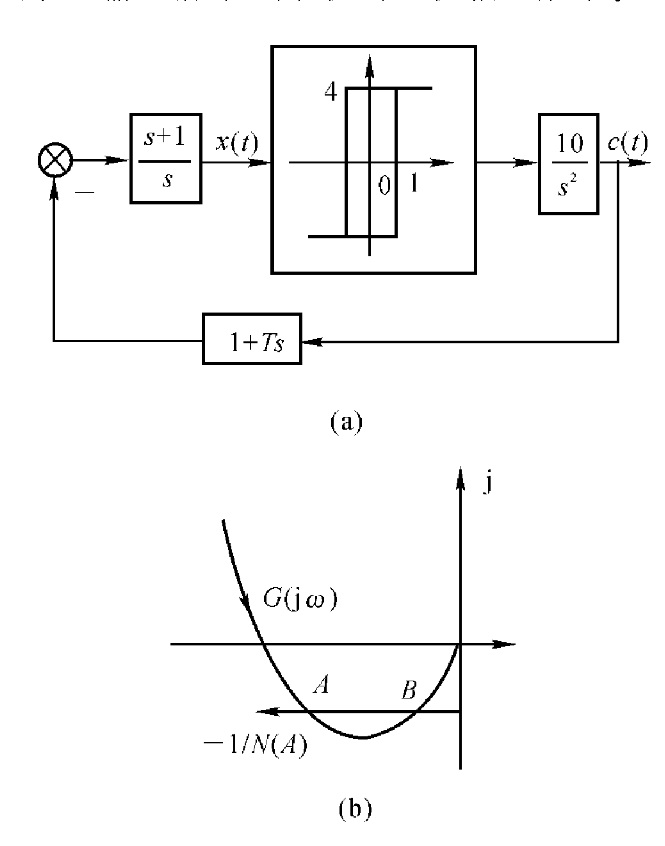


图8.22　例8.15图

解　　描述函数为

$$N(A)=\frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}-\mathrm{j}\,\frac{4ab}{\pi A^2}=\frac{16}{\pi A}\sqrt{1-\frac{1}{A^2}}-\mathrm{j}\,\frac{16}{\pi A^2}$$

$$-\frac{1}{N(A)}=\frac{-1}{\dfrac{16}{\pi A}\sqrt{1-\dfrac{1}{A^2}}-\mathrm{j}\,\dfrac{16}{\pi A^2}}=-\frac{\pi}{16}(\sqrt{A^2-1}+\mathrm{j})$$

$$I_{\mathrm{m}}\left[-\frac{1}{N(A)}\right]=-\frac{\pi}{16}$$

$$G(s)=\frac{10(s+1)(Ts+1)}{s^3}$$

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{-10(1+T)\omega+\mathrm{j}10(1-T\omega^2)}{\omega^3}$$

$$I_{\mathrm{m}}[G(\mathrm{j}\omega)]=\frac{10-10T\omega^2}{\omega^3}$$

令
$$\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{m}}[G(\mathrm{j}\omega)]}{\mathrm{d}\omega}=\frac{10T\omega^2-30}{\omega^4}=0$$

得
$$\omega=\sqrt{\frac{3}{T}}$$

此时 $I_{\mathrm{m}}[G(\mathrm{j}\omega)]$ 取极值

$$I_{\mathrm{m}}[G(\mathrm{j}\omega)]\Big|_{\omega=\sqrt{\frac{3}{T}}}=-20\sqrt{\frac{T^3}{27}}$$

令
$$-20\sqrt{\frac{T^3}{27}}=-\frac{\pi}{16}$$

得
$$T=0.137\ 5\ \mathrm{s}$$

由此说明，当 $T<0.137\ 5$ s 时，$G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 无交点，系统不产生自振，但系统不稳定。当 $T>0.137\ 5$ s 时，$G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 有 A 和 B 两个交点，如图 8.22(b) 所示，系统在 A 点做不稳定的周期运动，故 A 点不是自振点，而在 B 点做稳定的周期运动，B 点是自振点，且 T 越大，自振频率越高，振幅越小。

当 $T=0.25$ s 时，系统有稳定的自振。

令

$$I_{\mathrm{m}}\left[-\frac{1}{N(A)}\right]=I_{\mathrm{m}}[G(\mathrm{j}\omega)]$$

$$\mathrm{Re}\left[-\frac{1}{N(A)}\right]=\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]$$

即

$$\frac{10(1-T\omega^2)}{\omega^3}=-\frac{\pi}{16}$$

$$-\frac{10(1+T)\omega}{\omega^3}=-\frac{\pi}{16}\sqrt{A^2-1}$$

得
$$\omega=12.4,\quad A=1.082\ 3$$

将 A 折算到输出端，由

$$X(s)=-\frac{(s+1)(Ts+1)}{s}C(s)$$

有

$$C(\mathrm{j}\omega) = -\frac{\mathrm{j}\omega}{(1+\mathrm{j}\omega)(1+\mathrm{j}\omega T)}X(\mathrm{j}\omega)$$

输出端振荡的振幅为

$$C_x = \left| -\frac{\mathrm{j}\omega}{(1+\mathrm{j}\omega)(1+\mathrm{j}\omega T)} \right|_{\substack{\omega=12.4 \\ T=0.25}} \cdot A \Bigg|_{A=1.0823} = 0.54$$

输出振荡的频率为

$$\omega = 12.4$$

第九章

线性系统的状态空间分析与综合

9.1　人造地球卫星的近似线性方程为

$$J\ddot{\theta}_1(t) + \omega_0 J\dot{\theta}_3(t) = L_1(t)$$

$$J\ddot{\theta}_2(t) = L_2(t)$$

$$J\ddot{\theta}_3(t) - \omega_0 J\dot{\theta}_1(t) = L_3(t)$$

其中 $\theta_1(t)$,$\theta_2(t)$,$\theta_3(t)$ 表示卫星与定向轴位置的角偏差,$L_1(t)$,$L_2(t)$,$L_3(t)$ 表示作用于它的力矩,J 表示惯性矩,ω_0 表示定向轴的角频率。试写系统状态空间表达式。

解　取状态变量,输入(控制) 变量为

$$x_1 = \dot{\theta}_1 = y_1$$

$$x_2 = \dot{\theta}_2 = y_2$$

$$x_3 = \dot{\theta}_3 = y_3$$

$$u_1 = L_1$$

$$u_2 = L_2$$

$$u_3 = L_3$$

方程变为

$$J\dot{x}_1(t) + \omega_0 Jx_3(t) = u_1(t)$$

$$Jx_2(t) = u_2(t)$$

$$J\dot{x}_3(t) - \omega_0 Jx_1(t) = u_3(t)$$

整理得

$$\dot{x}_1(t) = -\omega_0 x_3(t) + \frac{1}{J}u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{J}u_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \omega_0 x_1(t) + \frac{1}{J}u_3(t)$$

系统状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -\omega_0\\ 0 & 0 & 0\\ \omega_0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} + \frac{1}{J}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ u_3(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$$

9.2　有 $R—L—C$ 网络如图 9.1 所示，图中电源电压 $u(t)$ 为输入，电容电压 u_C 为输出，试写出此网络的状态空间表达式。

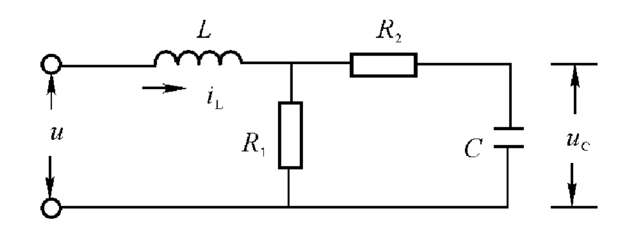


图 9.1　$R—L—C$ 电路

解法 1　取状态变量 $x_1 = i_L, x_2 = u_C$。根据克希荷夫定理

$$\begin{cases} i_L = \left(u - L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right)\dfrac{1}{R_1} + C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + u_C + C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}R_2 = u \end{cases}$$

经整理得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{L}\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_L - \dfrac{1}{L}\dfrac{R_1}{R_1+R_2}u_C + \dfrac{1}{L}u \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{R_1}{C(R_1+R_2)}i_L - \dfrac{1}{C(R_1+R_2)}u_C \end{cases}$$

以状态变量表示的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}x_1 - \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)}x_2 + \dfrac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \dfrac{R_1}{C(R_1+R_2)}x_1 - \dfrac{1}{C(R_1+R_2)} \end{cases}$$

输出方程为

$$y = u_c = x_2$$

写成矩阵形式的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)} & -\dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)}\\ \dfrac{R_1}{C(R_1+R_2)} & -\dfrac{1}{C(R_1+R_2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

解法 2　取状态变量为 $x_1=i_L$，$x_2=\int i_C\mathrm{d}t$，则 $y=u_C=\dfrac{1}{C}x_2$，根据克希荷夫定理

$$\begin{cases}i_L=\left(u-L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right)\dfrac{1}{R_1}+i_C\\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{C}\int i_C\mathrm{d}t+i_CR_2=u\end{cases}$$

将状态变量代入

$$\begin{cases}x_1=(u-L\dot{x}_1)\dfrac{1}{R_1}+\dot{x}_2\\ L\dot{x}_1+\dfrac{1}{C}x_2+R_2\dot{x}_2=u\end{cases}$$

整理得状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-\dfrac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}x_1-\dfrac{R_1}{LC(R_1+R_2)}x_2+\dfrac{1}{L}u\\ \dot{x}_2=\dfrac{R_1}{R_1+R_2}x_1-\dfrac{1}{C(R_1+R_2)}x_2\end{cases}$$

输出方程为

$$y=u_C=\frac{1}{C}x_2$$

写成矩阵形式的状态空间表达式为

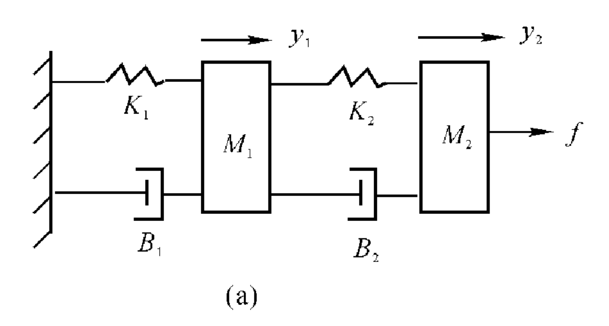
$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)} & -\dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)}\\ \dfrac{R_1}{R_1+R_2} & -\dfrac{1}{C(R_1+R_2)}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{C}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

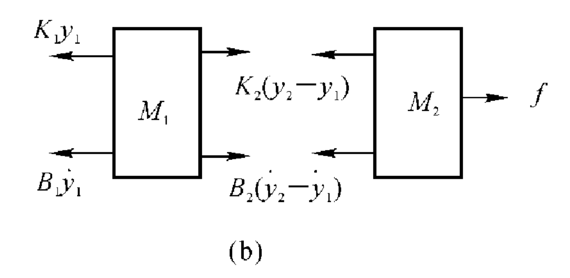
【点评】　从例 9.2 可以看到，状态变量的选取不是惟一的。状态变量选择不同，相应的系统阵、输入阵以及输出阵也不同。但不论状态变量如何选取，对一个具体系统来说，状态变量的个数总是相同的；另外，无论选取多少组状态变量，所描述的是同一系统的物理现象，或者说同一运动。因此，各组变量之间存在着某种必然联系。

9.3　试列写图 9.2 所示机械运动模型中在力 f 作用下质量块 M_1 和 M_2

的位移 y_1 和 y_2 的状态空间表达式。



(a)



(b)

图 9.2　例 9.3 的机械系统示意图

解　机械系统示意图及质量块 M_1 和 M 的受力图分别如图 9.2(a),(b) 所示,取状态变量为 $x_1=y_1$, $x_2=\dot{y}_1=\dot{x}_1$, $x_3=y_2$, $x_4=\dot{y}_2=\dot{x}_3$。根据牛顿运动定律,有

$$\begin{cases} K_2(y_2-y_1)+B_2(\dot{y}_2-\dot{y}_1)-K_1y_1-B_1\dot{y}_1=M_1\ddot{y}_1 \\ f-K_2(y_2-y_1)-B_2(\dot{y}_2-\dot{y}_1)=M_2\ddot{y}_2 \end{cases}$$

用状态变量表示的运动方程为

$$\begin{cases} K_2(x_3-x_1)+B_2(x_4-x_2)-K_1x_1-B_1x_2=M_1\dot{x}_2 \\ f-K_2(x_3-x_1)-B_2(x_4-x_3)=M_2\dot{x}_4 \end{cases}$$

经整理得

$$\dot{x}_2=-\frac{1}{M_1}(K_1+K_2)x_1-\frac{1}{M_1}(B_1+B_2)x_2+\frac{K_2}{M_1}x_3+\frac{B_2}{M_1}x_4$$

$$\dot{x}_4=\frac{K_2}{M_2}x_1+\frac{B_2}{M_2}x_2-\frac{K_2}{M_2}x_3-\frac{B_2}{M_2}x_4+\frac{1}{M_2}f$$

又

$$\dot{x}_1=x_2,\quad y_1=x_1,\quad \dot{x}_3=x_4,\quad y_2=x_3$$

系统状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{M_1}(K_1+K_2) & -\frac{1}{M_1}(B_1+B_2) & \frac{K_2}{M_1} & \frac{B_2}{M_1}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{K_2}{M_2} & \frac{B_2}{M_2} & -\frac{K_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{M_2}\end{bmatrix}f$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

9.4　设控制系统的微分方程为

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{u} + 3u$$

试写出该系统的状态空间表达式并画出状态变量图。

解　系统传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

令

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{Z(s)} \frac{Z(s)}{U(s)}$$

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+3s+2} \tag{1}$$

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = s+3 \tag{2}$$

由式(1) 得

$$\ddot{z} + 3\dot{z} + 2z = u$$

令

$$x_1 = z \quad , \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}$$

则有

$$\dot{x}_2 = \ddot{z} = -2x_1 - 3x_2 + u$$

由式(2) 有

$$y = \dot{z} + 3z = 3x_1 + x_2$$

于是可写出系统状态空间表达式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [3 \quad 1] \boldsymbol{x}$$

系统状态变量图如图 9.3 所示。

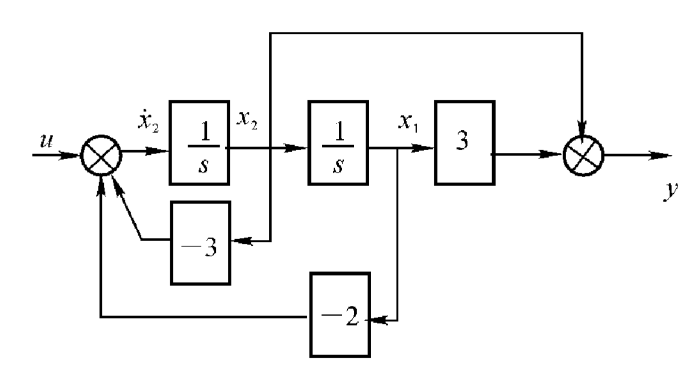


图 9.3　状态变量图

9.5　在图9.4所示系统中，若选取 x_1, x_2, x_3 作为状态变量，试列写状态空间表达式，并写成矩阵形式。

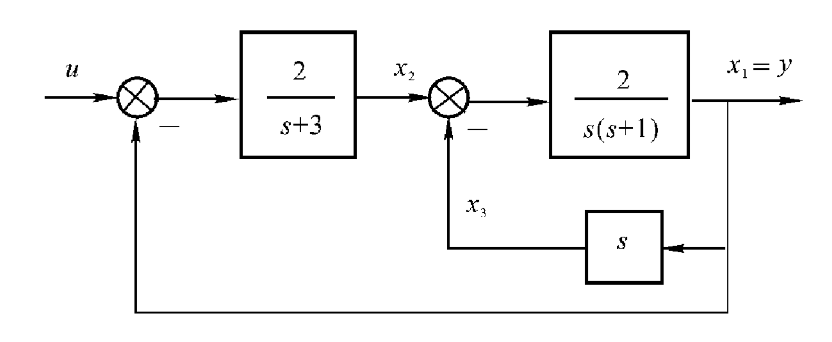


图9.4　例9.5图

解　由结构图可得

$$2(u - x_1) = \dot{x}_2 + 3x_2$$
$$2(x_2 - x_3) = \ddot{x}_1 + \dot{x}_1$$
$$x_3 = \dot{x}_1$$
$$y = x_1$$

整理可得系统状态空间表达式

$$\dot{x}_1 = x_3$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + 2u$$
$$\dot{x}_3 = 2x_2 - 3x_3$$
$$y = x_1$$

写成矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

9.6　试将下列状态空间表达式变换为对角标准形

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

解法 **1**　计算对应于各特征值的特征向量，并构成变换矩阵 $\boldsymbol{P}$。

(1) 经计算得

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(2) 用 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 构成变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 并计算 $\boldsymbol{P}^{-1}$

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{v}_1\quad \boldsymbol{v}_2\quad \boldsymbol{v}_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&6\\1&4&9\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{P}}{\det\boldsymbol{P}}=\begin{bmatrix}3&\frac{5}{2}&-2\\-3&-4&3\\1&\frac{3}{2}&-1\end{bmatrix}$$

(3) 计算 $\overline{\boldsymbol{A}},\overline{\boldsymbol{B}},\overline{\boldsymbol{C}}$

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&O\\&\lambda_2&\\O&&\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&&O\\&-2&\\O&&-3\end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&\frac{5}{2}&-2\\-3&-4&3\\1&\frac{3}{2}&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}=[1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&6\\1&4&9\end{bmatrix}=[1\quad 1\quad 1]$$

于是变换后的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\\dot{\bar{x}}_2\\\dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\\\bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\quad 1\quad 1]\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\\\bar{x}_3\end{bmatrix}$$

解法 2　由变换公式 $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}$$

其中，$\overline{\boldsymbol{A}}$ 由特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 直接写出

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

代入 $\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}$，有

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

解此方程得

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

从而有

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

于是可以计算 $\overline{\boldsymbol{B}}, \overline{\boldsymbol{C}}$。

9.7　试将下列状态空间表达式变换为约当标准形

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\boldsymbol{x}$$

解　(1) 求特征值

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

故　$\lambda_1 = -1$(二重根)，　$\lambda_2 = -2$

(2) 确定二重特征根 $\lambda_1 = -1$ 的广义特征向量的阶数

$$\text{rank}[\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rank}[\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^2 = \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\text{rank}[\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^3 = \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

由于 $\text{rank}[\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^2=\text{rank}[\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^3=1$，故对于 λ_1 的广义特征向量的阶数为 $k=2$ 。

(3) 求满足 $[\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^2 \boldsymbol{v}=0$ 和 $[\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}] \boldsymbol{v} \neq 0$ 的 $\boldsymbol{v}$，解得

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

用此 $\boldsymbol{v}$ 来确定广义特征向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$

$$\boldsymbol{v}_1=[\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}] \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}$$

(4) 求对应于 $\lambda_2=-2$ 的特征向量，容易求得

$$\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0 \\ 1 \\ 2\end{bmatrix}$$

(5) 用 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 为列向量构造变换矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{\operatorname{adj} \boldsymbol{P}}{\operatorname{det} \boldsymbol{P}}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1 \\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 \\ -2 \\ 1\end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C} \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

变换后的状态空间表达式为

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [-1 \quad 0 \quad 0]\bar{x}$$

9.8　将下列状态空间表达式化为模式形

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -11 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [2 \quad 1 \quad 0]x$$

解　(1) 求系统特征值

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = s^3 + 5s^2 + 11s + 15 = (s^2 + 2s + 5)(s + 3) = 0$$

得

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \mathrm{j}2, \quad \lambda_3 = -3$$

(2) 确定特征向量

$\boldsymbol{A}$ 为下友矩阵,且特征值互异,对于 $\lambda_1 = 1 + \mathrm{j}2$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + \mathrm{j}2 \\ (-1 + \mathrm{j}2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + \mathrm{j}2 \\ -3 - \mathrm{j}4 \end{bmatrix}$$

对于特征值 $\lambda_3 = -3$ 的特征向量

$$\boldsymbol{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_3 \\ \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(3) 求将 $\boldsymbol{A}$ 化为模式阵的变换阵

$$\boldsymbol{P}_M = [\mathrm{Re}(\boldsymbol{P}_1) \quad I_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{P}_1) \quad \boldsymbol{P}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_M^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{P}_M}{\det\boldsymbol{P}_M} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}_M^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_M = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -11 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{P}_M^{-1}\boldsymbol{B} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{P}_M = [2 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \end{bmatrix} = [1 \quad 2 \quad -1]$$

变换后的状态空间表达式为

$$\dot{\overline{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\overline{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 1/8 \\ -5/8 \\ -1/8 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad 2 \quad -1]\overline{\boldsymbol{x}}$$

9.9　已知系统的状态空间表达式

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + 2u_1 - u_2$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 2u_2$$

$$y_1 = x_1 - x_2$$

$$y_2 = 2x_1 + x_2 - x_3$$

试求其传递函数矩阵。

解　把状态空间表达式写成矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \times \begin{bmatrix} -s^2 - 4s + 29 & s^2 + 3s - 4 \\ 4s^2 + 56s + 52 & -3s^2 - 17s - 14 \end{bmatrix}$$

也可写成

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}s^2 + \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 56 & -17 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 29 & -4 \\ 52 & -14 \end{bmatrix}}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

9.10　线性定常系统的齐次状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

系统的初始条件为

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

求系统齐次状态方程的解 $x(t)$。

解　先求系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。

解法 1　按矩阵指数定义

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2\,!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots=$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}t+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}^2t^2+\cdots=$$

$$\begin{bmatrix}1-t^2+t^3-\cdots & t-\frac{3}{2}t^2+\frac{7}{6}t^3+\cdots\\ -2t+3t^2-\frac{7}{3}t^2+\cdots & 1-3t+\frac{7}{2}t^2-\frac{5}{2}t^3+\cdots\end{bmatrix}$$

解法 2　用拉氏变换法

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]$$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}}=$$

$$\frac{1}{s^3+3s+2}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

故得

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$$

解法 3　用凯莱—哈密顿定理

系统特征方程

$$\det[\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个互异特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$ 。

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=a_0(t)\boldsymbol{I}+a_1(t)\boldsymbol{A}$$

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & -e^{-2t} \\ e^{-t} & -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

系统齐次状态方程解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) =$$

$$\begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

【点评】 求线性定常系统状态方程的解，关键是求状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$（即矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}t}$）。常用求 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的方法有 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 定义法、拉氏变换法、凯莱-哈密顿定理法、西勒维斯特内插公式法。

9.11 已知系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

试求在初始条件 $\boldsymbol{x}(0) = [2 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$ 时系统的响应。

解 利用矩阵指数函数的性质

当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 时，$e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t} = e^{\boldsymbol{A}t}e^{\boldsymbol{B}t}$，求 $\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$。

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

经验证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，则有

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \exp\left\{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}\right\} = \exp\left\{\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}\right\} \exp\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

利用性质可求得

$$\exp\left\{\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sigma t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sigma t} \end{bmatrix}$$

利用定义可以求得

$$\exp\left\{\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}1&t&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&t\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t}&0&0&0\\0&\mathrm{e}^{\lambda t}&0&0\\0&0&\mathrm{e}^{\sigma t}&0\\0&0&0&\mathrm{e}^{\sigma t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&t&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&t\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t}&t\mathrm{e}^{\lambda t}&0&0\\0&\mathrm{e}^{\lambda t}&0&0\\0&0&\mathrm{e}^{\sigma t}&t\mathrm{e}^{\sigma t}\\0&0&0&\mathrm{e}^{\sigma t}\end{bmatrix}$$

系统的响应为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t}&t\mathrm{e}^{\lambda t}&0&0\\0&\mathrm{e}^{\lambda t}&0&0\\0&0&\mathrm{e}^{\sigma t}&t\mathrm{e}^{\sigma t}\\0&0&0&\mathrm{e}^{\sigma t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{\lambda t}\\0\\\mathrm{e}^{\sigma}(1+t)\\\mathrm{e}^{\sigma t}\end{bmatrix}$$

9.12　设系统状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

已知当 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$时，$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}\\-\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$

当 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$时，$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}\\-\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$

求系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 。

解　先计算 $\boldsymbol{\Phi}(t)$。

设 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_{11}(t)&\varphi_{12}(t)\\\varphi_{21}(t)&\varphi_{22}(t)\end{bmatrix}$，由于 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)$，依已知条件有

$$\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}\\-\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi_{11}(t)&\varphi_{12}(t)\\\varphi_{21}(t)&\varphi_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}\\-\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi_{11}(t)&\varphi_{12}(t)\\\varphi_{21}(t)&\varphi_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

解方程组得

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}&2\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t}\\-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}&-\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$$

系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可由 $\boldsymbol{\Phi}$ 的性质求得

$$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\Big|_{t=0}=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}&2\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t}\\-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}&-\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}'_{t=0}=\begin{bmatrix}0&2\\-1&-3\end{bmatrix}$$

注意　可根据两个已知条件列写下面式子，从而求出 $\boldsymbol{\Phi}(t)$。

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(t)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-t}-2e^{-2t} \\ -e^{-t}+e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

9.13　已知系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}u$$

求初始状态 $\boldsymbol{x}(0) = [1 \quad 2 \quad 1]^{\mathrm{T}}$，系统在单位阶跃输入作用下的时间响应。

解　这是非齐次状态方程解的问题，故由

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

知，解题关键是求出系统的状态转移矩阵。

系统矩阵是约当形，有

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

因此有

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} & \tau e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \times 1 \times \mathrm{d}\tau =$$

$$\begin{bmatrix} 1+te^{-t} \\ 1+e^{-t} \\ 2-e^{-2t} \end{bmatrix}$$

9.14　线性定常系统传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{s+4}{s+3} \end{bmatrix}$$

(1) 求系统可控标准形实现，画出系统状态图；

(2) 用传递函数并联分解法，求系统对角形实现，画出系统状态图。

解　(1)

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{s+3}+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} (s+3)^2 \\ (s+1)(s+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}\begin{bmatrix} s^2+6s+9 \\ s^2+3s+2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

利用传递函数直接分解法得可控标准形实现

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

（2）
$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

令　$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)},\dfrac{X_1(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{s+1},\ \dfrac{X_2(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{s+2},\ \dfrac{X_3(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{s+3}$

可得　$\dot{x}_1=-x_1+u\qquad \dot{x}_2=-2x_2+u\qquad \dot{x}_3=-3x_3+u$

$y_1=2x_1-x_2\qquad y_2=x_3+u$

故
$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

可控标准形、对角形实现对应的状态图分别如图9.5(a),(b) 所示。

9.15　设系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+8s+15}{s^3+7s^2+14s+8}$$

求其不同形式的实现,并画出相应的状态图。

解法 **1**　引入中间变量 $V(s)$,使

$$G(s)=\frac{Y(s)}{V(s)}\frac{V(s)}{U(s)}=\frac{s^2+8s+15}{s^3+7s^2+14s+8}$$

令
$$\frac{V(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^3+7s^2+14s+8}$$

$$\frac{Y(s)}{V(s)}=s^2+8s+15$$

于是有

$$\dddot{v}+7\ddot{v}+14\dot{v}+8v=u$$

$$\ddot{v}+8\dot{v}+15v=y$$

选择 $x_1=v,\ x_2=\dot{v},\ x_3=\ddot{v}$,则有

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -8x_1 - 14x_2 - 7x_3 + u$$
$$y = 15x_1 + 8x_2 + x_3$$

可控标准形实现为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = [15 \quad 8 \quad 1]\boldsymbol{x}$$

状态图如图 9.6 所示。

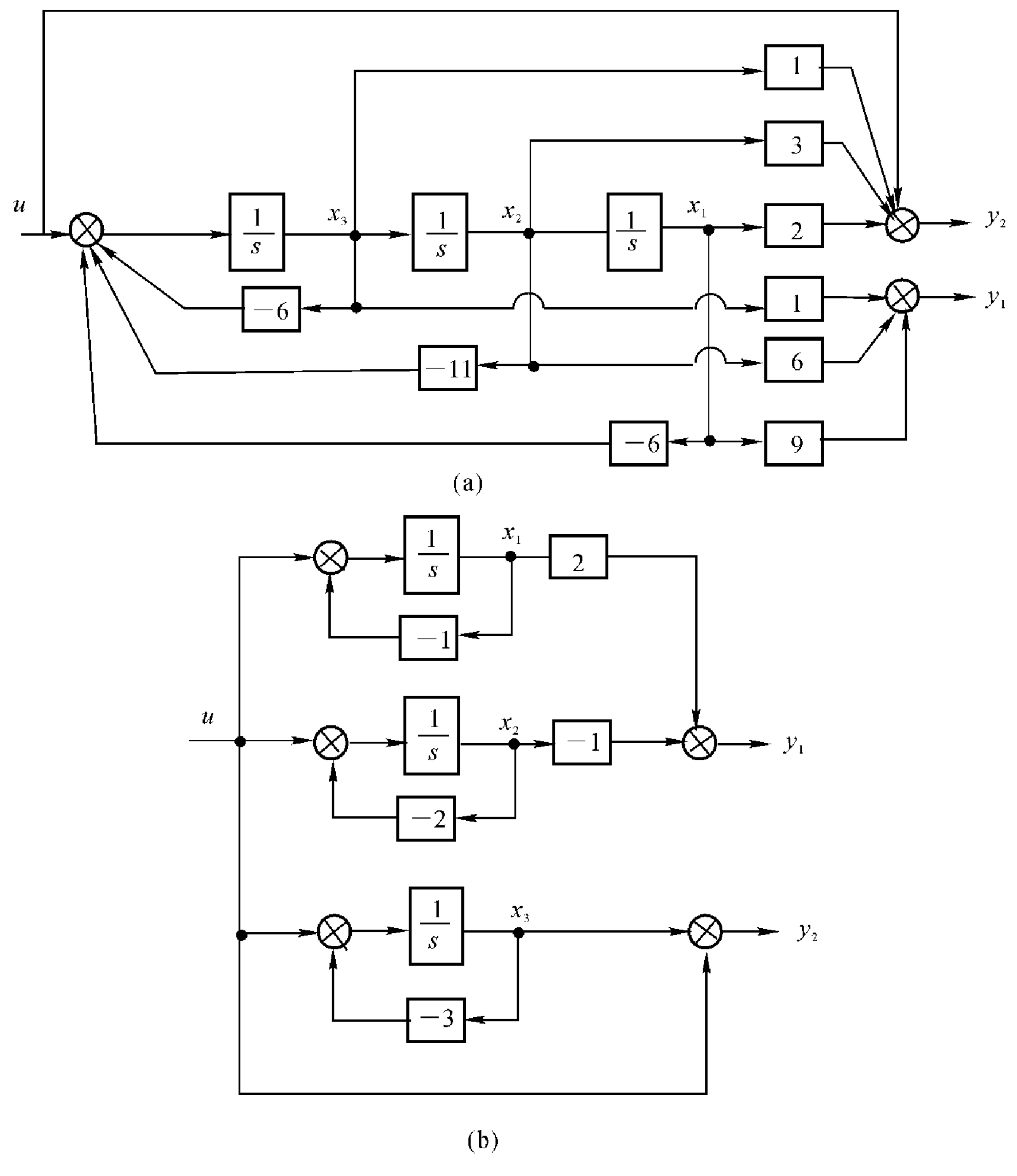


图 9.5　状态图

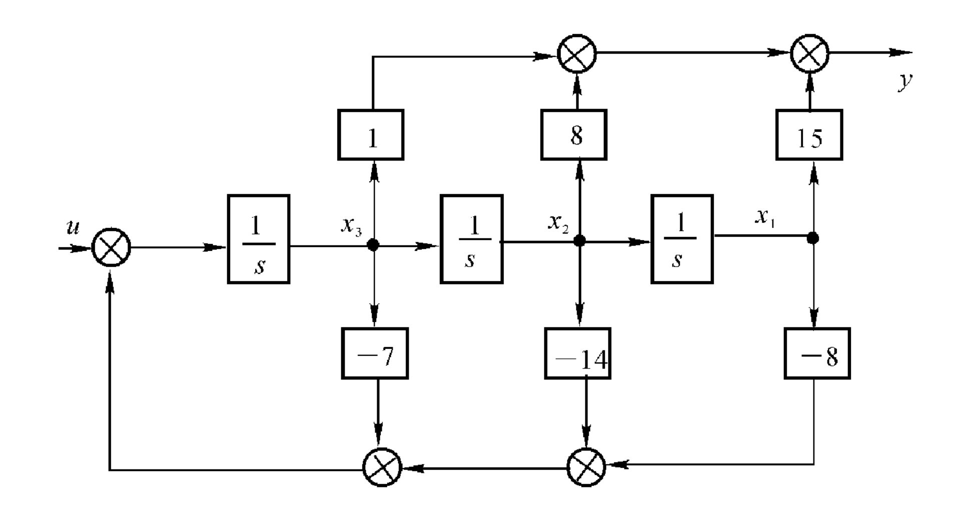


图 9.6　可控标准形实现状态图

解法 **2**　系统对应微分方程为

$$\dddot{y}+7\ddot{y}+14\dot{y}+8y=\ddot{u}+8\dot{u}+15u$$

选择

$$x_1=\ddot{y}+7\dot{y}+14y-\dot{u}-8u$$
$$x_2=\dot{y}+7y-u$$
$$x_3=y$$

可得

$$\dot{x}_1=\dddot{y}+7\ddot{y}+14\dot{y}-\ddot{u}-8\dot{u}=-8x_3+15u$$
$$\dot{x}_2=\ddot{y}+7\dot{y}-\dot{u}=x_1-14x_3+8u$$
$$\dot{x}_3=\dot{y}=x_2-7x_3+u$$

故有系统可观测标准形实现

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&-8\\1&0&-14\\0&1&-7\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}15\\8\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=[0\quad 0\quad 1]\boldsymbol{x}$$

状态图如图 9.7 所示。

解法 **3**　将系统传递函数分解部分分式

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+8s+15}{s^3+7s^2+14s+8}=\frac{\frac{8}{3}}{s+1}-\frac{\frac{3}{2}}{s+2}-\frac{\frac{1}{6}}{s+4}$$

于是得并联分解表示形式

$$Y(s)=\left(\frac{\frac{8}{3}}{s+1}-\frac{\frac{3}{2}}{s+2}-\frac{\frac{1}{6}}{s+4}\right)U(s)$$

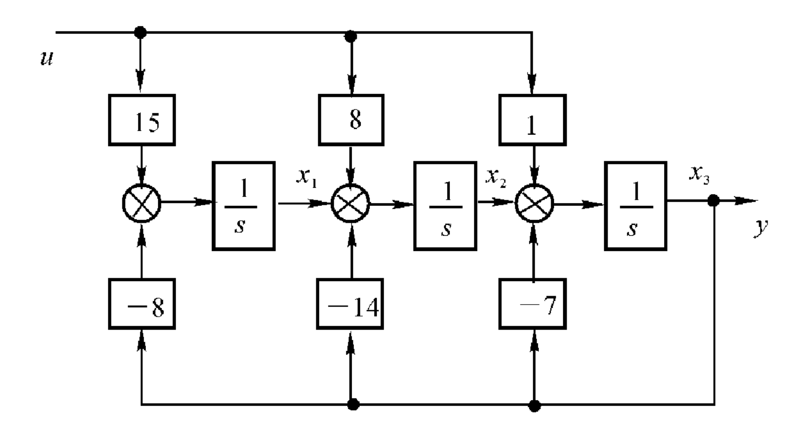


图 9.7　可观测标准形实现状态图

设 $X_1(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s)$，$X_2(s) = \dfrac{1}{s+2}U(s)$，$X_3(s) = \dfrac{1}{s+4}U(s)$，可得

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

$$\dot{x}_3 = -4x_3 + u$$

$$y = \frac{8}{3}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{6}x_3$$

故有

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

这是系统的对角形实现，状态图如图 9.8 所示。

解法 4　系统传递函数可写成

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s+3}{s+2} \cdot \frac{s+5}{s+4}$$

令

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{s+3}{s+2}X_1(s)$$

$$X_3(s) = \frac{s+5}{s+4}X_2(s) = Y(s)$$

相应可得

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + 3x_1 - 2x_2 = 2x_1 - 2x_2 + u$$
$$\dot{x}_3 = \dot{x}_2 + 5x_2 - 4x_3 = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + u$$
$$y = x_3$$

因此有

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

这是系统的串联分解实现,相应状态图如图 9.9 所示。

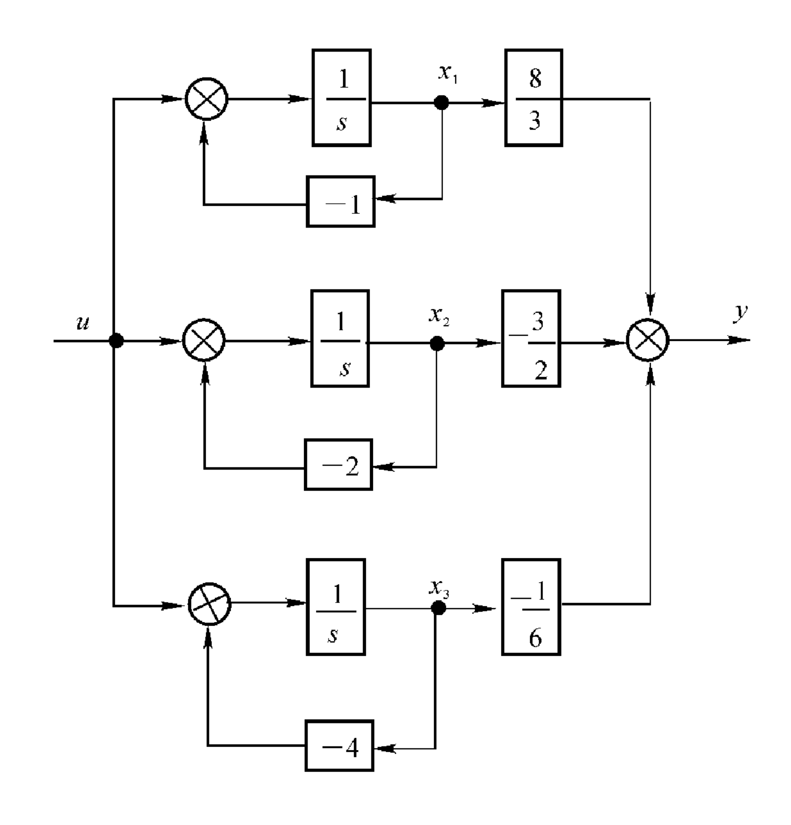


图 9.8　对角形实现状态图

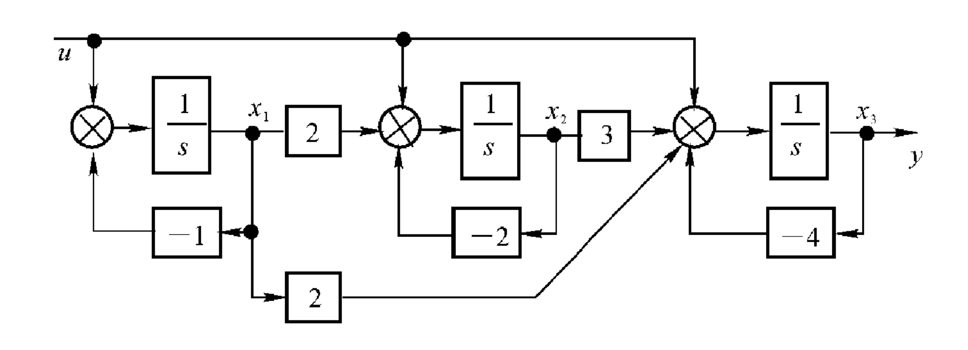


图 9.9　串联分解实现状态图

9.16 系统传递函数矩阵为

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & 0 & \frac{-1}{s^2+1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

求系统的可控标准形最小实现。

解 提取 $G(s)$ 的最小公分母,将 $G(s)$ 写成

$$G(s)=\frac{V(s)}{U(s)}\cdot\frac{Y(s)}{V(s)}=\frac{1}{s(s^2+1)}\begin{bmatrix}s^2+1\\0\\-s\end{bmatrix}$$

令

$$\frac{V(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^3+s},\quad \frac{Y(s)}{V(s)}=\begin{bmatrix}s^2+1\\0\\-s\end{bmatrix}$$

则

$$\dddot{v}+\dot{v}=u,\ y_1=\ddot{v}+v,\ y_2=0,\ y_3=-\dot{v}$$

选

$$\begin{aligned}
x_1&=v\\
\dot{x}_1&=x_2=\dot{v}\\
\dot{x}_2&=x_3=\ddot{v}\\
\dot{x}_3&=\dddot{v}=-\dot{v}+u=-x_2+u\\
y_1&=x_1+x_3\\
y_2&=0\\
y_3&=-x_2
\end{aligned}$$

故有

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

【点评】 一种简单寻求最小实现方法的步骤是:

(1) 对给定传递函数阵 $G(s)$ 先初选出一种实现,通常选取可控标准形实现或可观测标准形实现。

若输入维数 $p>$ 输出维数 q,采用可观测标准形实现;

若输入维数 $p<$ 输出维数 q,采用可控标准形实现。

(2) 用结构分解的方法对上面所选的实现找出其可控可观测部分,此即为最小实现。

9.17 线性定常连续系统的状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad 0]\boldsymbol{x}$$

设采样周期 $T = 1$ s,求离散化后系统的离散状态空间表达式。

解　连续系统离散化后状态空间表达式可写为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}(T)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{H}(T)\boldsymbol{u}(K)$$

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)$$

先求连续系统状态转移矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})]^{-1} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1}\right\} =$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-2)}\begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s(s-2)} \\ 0 & \dfrac{1}{s-2} \end{bmatrix} =$$

$$\mathscr{L}^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{s}\right) \\ 0 & \dfrac{1}{s-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t} - 1) \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}(T) = \boldsymbol{\Phi}(t)\Big|_{t=T} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2} - 1) \\ 0 & \mathrm{e}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3.195 \\ 0 & 7.389 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}(T) = \int_0^T \boldsymbol{\Phi}(\tau)\boldsymbol{B}\mathrm{d}\tau = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\tau} - 1) \\ 0 & \mathrm{e}^{2\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau =$$

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\tau} - 1) \\ \mathrm{e}^{2\tau} \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{2} - 3) \\ \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2} - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.097 \\ 3.195 \end{bmatrix}$$

故系统的离散化状态空间表达式为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 3.195 \\ 0 & 7.389 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k) + \begin{bmatrix} 1.097 \\ 3.195 \end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0]\boldsymbol{x}(k)$$

9.18　求离散时间状态方程

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(k)$$

在初始状态 $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,输入 $u(k) = 1$ 时的数值解。

解法 1　利用递推公式求解

$$x(k)=G^k x(0)+\sum_{i=1}^{k-1}G^{k-i-1}Hu(i),\ i=1,2,\cdots$$

有

$$x(1)=Gx(0)+Hu(0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1.84\end{bmatrix}$$

$$x(2)=Gx(1)+Hu(1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1.84\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.84\\ -0.84\end{bmatrix}$$

$$x(3)=Gx(2)+Hu(2)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.84\\ -0.84\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.16\\ 1.386\end{bmatrix}$$

依次递推下去可以得到一个解序列。

解法 **2**　利用 Z 变换法

$$X(z)=(zI-A)^{-1}zX(0)+(zI-A)^{-1}HU(z)$$

因为 $u(k)=1$ 相应的 $U(z)=\dfrac{z}{z-1}$,则有

$$zX(0)+HU(z)=\begin{bmatrix}z\\ -z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{z}{z-1}\\ \dfrac{z}{z-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{z^2}{z-1}\\ \dfrac{-z^2+2z}{z-1}\end{bmatrix}$$

$$(zI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}z & -1\\ 0.16 & z+1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)}\begin{bmatrix}z+1 & 1\\ -0.16 & z\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\frac{4}{3}}{z+0.2}+\dfrac{-\frac{1}{3}}{z+0.8} & \dfrac{\frac{5}{3}}{z+0.2}+\dfrac{-\frac{5}{3}}{z+0.8}\\ \dfrac{-\frac{0.8}{3}}{z+0.2}+\dfrac{\frac{0.8}{3}}{z+0.8} & \dfrac{-\frac{1}{3}}{z+0.2}+\dfrac{\frac{4}{3}}{z+0.8}\end{bmatrix}$$

故有

$$X(z)=(zI-A)^{-1}[zX(0)+HU(z)]=\begin{bmatrix}\dfrac{-\frac{17z}{6}}{z+0.2}+\dfrac{\frac{22z}{9}}{z+0.8}+\dfrac{\frac{25z}{18}}{z-1}\\ \dfrac{\frac{3.4z}{6}}{z+0.2}+\dfrac{-\frac{17.6z}{9}}{z+0.8}+\dfrac{\frac{7z}{18}}{z-1}\end{bmatrix}$$

最后将 $X(z)$ 进行 Z 反变换得

$$X(k)=\mathscr{L}^{-1}[X(z)]=\begin{bmatrix}-\dfrac{17}{6}(-0.2)^k+\dfrac{22}{9}(-0.8)^k+\dfrac{25}{18}\\ \dfrac{3.4}{6}(-0.2)^k-\dfrac{17.6}{9}(-0.8)^k+\dfrac{7}{18}\end{bmatrix}$$

将 $k=1,2,\cdots$ 代入，即可得到与解法 1 结果相同的数值解。

【点评】 (1) 递推法既适用于线性定常离散系统又适用于线性时变离散系统。而 z 变换法只适用于线性定常离散系统。

(2) 递推法求得的是解的序列形式，而 z 变换可以得到解的封闭形式。

(3) 如果要获得采样点间 $t=(k+\Delta)T \quad (0\leqslant\Delta\leqslant 1)$ 的状态 $\boldsymbol{x}[(k+\Delta)T]$，其计算公式为

$$\boldsymbol{x}[(k+\Delta)T]=\boldsymbol{\Phi}(\Delta T)\boldsymbol{x}(kT)+\int_0^{\Delta T}\boldsymbol{\Phi}(\Delta T-\tau)\boldsymbol{Bu}(kT)\mathrm{d}\tau$$

9.19　已知系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}a & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}b\\ -1\end{bmatrix}u$$

试确定使系统具有可控性时，常数 a,b 应满足什么关系？

解　由状态方程可知

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b\\ -1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}a & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ab-1\\ -b\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}b & ab-1\\ -1 & -b\end{bmatrix}$$

判别可控性判别阵的秩是否为 n，可通过判别其行列式是否为零来进行。

$$\det[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}]=\begin{vmatrix}b & ab-1\\ -1 & -b\end{vmatrix}=-(b^2-ab+1)$$

当 $\det[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}]\neq 0$，即 $b^2-ab+1\neq 0$ 时系统可控。

9.20　设连续时间系统状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\quad 0]\boldsymbol{x}$$

试分析采样周期 T 对离散化系统可控性与可观性的影响。

解　离散化系统的 $\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}$ 阵分别为

$$\boldsymbol{G}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]_{t=T}=$$

$$\mathscr{L}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{s}{s^2+\omega^2} & \dfrac{1}{s^2+\omega^2}\\ \dfrac{-\omega^2}{s^2+\omega^2} & \dfrac{s}{s^2+\omega^2}\end{bmatrix}_{t=T}=\begin{bmatrix}\cos\omega T & \dfrac{\sin\omega T}{\omega}\\ -\omega\sin\omega T & \cos\omega T\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=\int_0^T\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}t=\int_0^T\begin{bmatrix}\cos\omega t & \dfrac{\sin\omega t}{\omega}\\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}\dfrac{1-\cos\omega T}{\omega^2}\\ \dfrac{\sin\omega T}{\omega}\end{bmatrix}$$

于是离散系统可控性矩阵和可观测性矩阵分别为

$$P_c = [H \quad GH] = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos\omega T}{\omega^2} & \dfrac{\cos\omega T - \cos^2\omega T + \sin^2\omega T}{\omega^2} \\ \dfrac{\sin\omega T}{\omega} & \dfrac{2\sin\omega T\cos\omega T - \sin\omega T}{\omega} \end{bmatrix}$$

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos\omega T & \dfrac{\sin\omega T}{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\det P_c = \frac{2}{\omega^3}\sin\omega T(\cos\omega T - 1)$$

$$\det P_o = \frac{\sin\omega T}{\omega}$$

显然,若 $T = \dfrac{k\pi}{\omega}$, $k = 1,2,\cdots$,则有

$$\det P_c = 0 \quad , \quad \det P_o = 0$$

故欲使该系统离散化后是可控和可观测的,采样周期 T 应满足

$$T \neq \frac{k\pi}{\omega} \quad , \quad k = 1,2,\cdots$$

【点评】 完全可控的连续系统经离散化后,如果采样周期选择不当,可能失去可控性。上例中原系统是可控的,若离散化时采样周期不满足 $T \neq \dfrac{k\pi}{\omega}$, $k = 1,2,\cdots$ 则离散后的系统不可控。

9.21 水槽液位系统如图 9.10 所示,已知 u_1,u_2 为水槽 Ⅰ 和 Ⅱ 的流量,R_1,R_2 为水槽 Ⅰ 和 Ⅱ 的液阻,h_1,h_2 为水槽 Ⅰ,Ⅱ 的液位,C_1,C_2 为水槽 Ⅰ,Ⅱ 的截面积。试研究系统在平衡位置附近的以下二种动态特性:

(1) 若只有一个调节阀,那么此阀安装在(Ⅰ)或(Ⅱ)的哪个位置合适?

(2) 若只有一个液位测量仪表,那么测量哪个槽的液位合适?

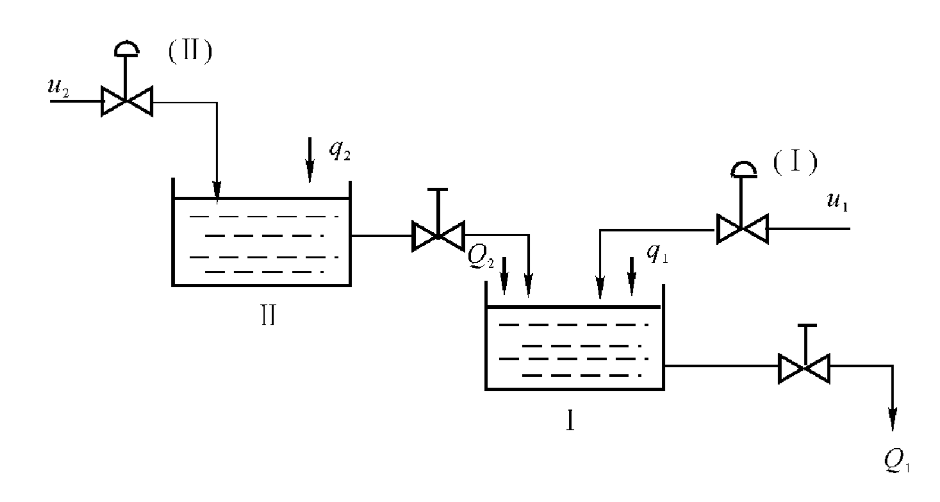


图 9.10 双水槽液位系统

解　该系统可视为线性定常系统，所讨论的问题实际上是系统的结构特性 —— 可控性与可观性问题。

(1) 建立系统状态空间表达式

根据物料平衡关系列写以下二个一阶微分方程组：

对 Ⅰ 槽：
$$C_1\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}=u_1+Q_2-Q_1$$

对 Ⅱ 槽：
$$C_2\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}=u_2-Q_2$$

状态变量选择 Ⅰ，Ⅱ 槽的液位，即：$x_1=h_1$，$x_2=h_2$，整理得

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{R_1C_1}x_1+\frac{1}{R_2C_1}x_2+\frac{1}{C_1}u_1$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{R_2C_2}x_2+\frac{1}{C_2}u_2$$

系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{R_1C_1} & \dfrac{1}{R_2C_1}\\ 0 & -\dfrac{1}{R_2C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C_1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

(2) 按下列 3 种情况讨论系统的可控性，以便确定调节阀安装位置

① 假定槽 Ⅰ 和 Ⅱ 均能有效调节，即这时系统应有二个输入 u_1 和 u_2，输入矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C_1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{C_2}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}_{\mathrm{c}}=\mathrm{rank}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}]=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C_1} & 0 & -\dfrac{1}{C_1^2R_1} & \dfrac{1}{C_1C_2R_2}\\ 0 & \dfrac{1}{C_2} & 0 & -\dfrac{1}{C_2^2R_2}\end{bmatrix}=2=n$$

故此时系统是可控的，但需要安装二个调节阀，与给定条件不符。

② 若将调节阀装在槽 Ⅰ，而对槽 Ⅱ 不调节，这时系统仅有一个输入 u_1，输入矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C_1}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}_c = \mathrm{rank}[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1^2 R} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < n$$

故此时系统不可控。

③ 若将调节阀装在槽 Ⅱ，而对槽 Ⅰ 不调节，这时系统只有一个输入 u_2，输入矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}_c = \mathrm{rank}[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1 C_2 R_2} \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2^2 R_2} \end{bmatrix} = 2 = n$$

则此时系统可控。

综上所述，只有将仅有的一个调节阀装在 Ⅱ 槽上，系统才是可控的。

(3) 讨论以下 3 种情况下系统的可观性，以便确定液位测量仪表的安装位置。

① 若 x_1 和 x_2 都能测量

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \qquad \text{即} \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$$

此时系统可观，但需要安装二个液位测量仪，这与给定条件不符。

② 若仅测量 x_1，而 x_2 没有测量，那么

$$y = \boldsymbol{x}_1 = [1 \quad 0]\boldsymbol{x}$$

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}_o = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \end{bmatrix} = 2 = n$$

系统可观测。

③ 若仅测量 x_2，而 x_1 没有测量，那么

$$y = \boldsymbol{x}_2 = [0 \quad 1]\boldsymbol{x}$$

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}_o = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} = 1 < n$$

系统不可观。

可见，只有测量 x_1，即将仅有一个液位测量仪表装在 Ⅰ 槽上，系统才是可观的。

9.22　已知系统状态空间表达式如下：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}u$$

$$y = [c_1 \quad c_2]\boldsymbol{x}$$

欲使系统中有一个状态既可控又可观测，另一个状态既不可控又不可观测，试确定 b_1, b_2 和 c_1, c_2 应满足的关系。

解　系统特征方程为

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$$

可见特征根为互异单根，且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为底友矩阵，可用范得蒙矩阵实现对角化，即

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_1 + b_2 \\ -b_1 - b_2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{P} = [c_1 \quad c_2]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = [c_1 - c_2 \quad c_1 - 2c_2]$$

对角化后系统状态空间表达式为

$$\dot{\overline{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\overline{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 2b_1 + b_2 \\ -b_1 - b_2 \end{bmatrix}\overline{u}$$

$$y = [c_1 - c_2 \quad c_1 - 2c_2]\overline{\boldsymbol{x}}$$

令 $\overline{x}_1$ 可控可观测，$\overline{x}_2$ 不可控不可观测，则应有

$$\begin{cases} 2b_1 + b_2 \neq 0 \\ c_1 - c_2 \neq 0 \end{cases} \cap \begin{cases} -b_1 - b_2 = 0 \\ c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} b_1 = -b_2 \\ c_1 = 2c_2 \end{cases}$$

当令 $\overline{x}_1$ 不可控不可观测，$\overline{x}_2$ 可控可观测时，可同理讨论。

【点评】　可控性可观测性是系统的固有特性，不会因线性变换而改变。本题通过线性变换将系统方程化为对角形，利用对角形可控可观测性判据来解题。

9.23　线性定常系统状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [0 \quad 1 \quad -2]\boldsymbol{x}$$

试判别：

(1) 系统是否完全状态可控？如不完全可控，试求出可控子系统。

(2) 系统是否完全状态可观测？如不完全可观测，试求出其可观测子系统。

解 (1) 系统可控性矩阵为

$$\boldsymbol{P}_c = [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}_c = 2 < n = 3$$

因此系统不是完全状态可控的。

为求可控子系统必须构造非奇异矩阵，系统可控性指数为 2，在 $\boldsymbol{P}_c$ 中选两个线性无关列向量 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，再任取一个与之线性无关列向量 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，构或变换矩阵

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

令 $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}$，系统方程变换为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}$$

经计算系统方程为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right]u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad -1 \quad -2]\bar{\boldsymbol{x}}(t)$$

即

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = \left[\begin{array}{c:c} \bar{\boldsymbol{A}}_c & \bar{\boldsymbol{A}}_{12} \\ \hdashline 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_{22} \end{array}\right]\bar{\boldsymbol{x}} + \left[\begin{array}{c} \bar{\boldsymbol{B}}_c \\ \hdashline 0 \end{array}\right]u$$

其中 $\bar{\boldsymbol{A}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$， $\bar{\boldsymbol{B}}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。

$$\mathrm{rank}[\bar{\boldsymbol{B}}_c \quad \bar{\boldsymbol{A}}_c\bar{\boldsymbol{B}}_c] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

故($\bar{\boldsymbol{A}}_c \quad \bar{\boldsymbol{B}}_c$) 是可控对。

所以可控子系统是

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_c = \bar{\boldsymbol{A}}_c\bar{\boldsymbol{x}}_c + \bar{\boldsymbol{B}}_c u$$

即

$$\dot{\bar{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \bar{x}_c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

(2) 系统可观测矩阵为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \end{bmatrix} = 2 < n = 3$$

因此系统不完全可观测。

为了求可观测的子系统必须构造非奇异变换矩阵 T,令

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 T 的第一行是 $\boldsymbol{C}$,第二行是 $\boldsymbol{CA}$,第三行是任意的,但必须保证 $\boldsymbol{T}$ 非奇异。

令 $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Tx}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}$,将系统变换为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{TAT}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{TB}\,\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{CT}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}$$

计算线性变换后的系统方程

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ \hdashline 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \bar{\boldsymbol{x}} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ \hdashline 1 \end{array}\right] u$$

$$y = [0 \quad 1 \quad -2] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}} = [1 \quad 0 \,\vdots\, 0] \bar{\boldsymbol{x}}$$

即

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \left[\begin{array}{c:c} \bar{\boldsymbol{A}}_o & 0 \\ \hdashline \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{array}\right] \bar{\boldsymbol{x}} + \left[\begin{array}{c} \bar{\boldsymbol{B}}_1 \\ \hdashline \boldsymbol{B}_2 \end{array}\right] u$$

$$y = [\bar{\boldsymbol{C}}_o \,\vdots\, 0] \bar{\boldsymbol{x}}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{o}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{o}}=[1\quad 0]$。

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{o}}\\ \bar{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{o}}\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{o}}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2$$

故($\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{o}}$ $\bar{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{o}}$)是可观测对。

所以可观测子系统是

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{\mathrm{o}}=\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{o}}\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{o}}+\bar{\boldsymbol{B}}_1u$$
$$\bar{y}_{\mathrm{o}}=\bar{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{o}}\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{o}}$$

即

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{\mathrm{o}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{o}}+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u$$
$$\bar{y}_{\mathrm{o}}=[1\quad 0]\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{o}}$$

9.24 已知系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$
$$y=[0\quad 1\quad -2]\boldsymbol{x}$$

是状态不完全可控和不完全可观测，试将系统按可控性和可观测性进行结构分解。

解 例 9.23 已将系统按可控性进行分解

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{\mathrm{c}}\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{\bar{\mathrm{c}}}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -2\\ \hdashline 0 & 0 & -1\end{array}\right]\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{c}}\\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{\mathrm{c}}}\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}1\\ 0\\ \hdashline 0\end{array}\right]u$$
$$y=\left[\begin{array}{cc:c}1 & -1 & -2\end{array}\right]\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{c}}\\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{\mathrm{c}}}\end{bmatrix}$$

从上式可以看出，不可控子系统是一维的，且显见是可观测的，故无需再进行分解。

最后对可控子系统 Σ_{c}

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{c}}+\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{\mathrm{c}}}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$
$$y=[1\quad -1]\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{c}}$$

判别其可观测性，因

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=1<2$$

故不可观测。按可观测分解，并构造非奇异变换阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

于是 Σ_c 按可观测性分解为

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{co}\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{co}\\ \bar{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

即

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{co}\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{co}\\ \bar{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{co}\\ \bar{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{co}\\ \bar{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}$$

综合以上两次变换结果，系统按可控和可观测分解为显表达式

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{co}\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{c\bar{o}}\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{\bar{c}o}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{co}\\ \bar{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}}\\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{co}\\ \bar{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}}\\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}\end{bmatrix}$$

【点评】　对于线性定常系统，从可控制、可观测性出发，状态变量可分解为可控可观测 x_{co}，可控不可观测 $x_{c\bar{o}}$，不可控可观测 $x_{\bar{c}o}$ 和不可控不可观测 $x_{\bar{c}\bar{o}}$ 4 类。以此对应将状态空间划分为 4 个子空间，系统也对应可分解为 4 个子系统，这是系统的规范分解。研究规范分解能更明显揭示系统的结构特征和传递函数。

9.25　给定系统 $\Sigma=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 的约当标准形为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc:cc}-4 & 1 & & & & \\ 0 & -4 & & & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hdashline & & 3 & 1 & & \\ & & 0 & 3 & & \\ \hdashline & & & & -1 & 1\\ \multicolumn{2}{c}{0} & & & 0 & -1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{cc}1 & 3\\ 5 & 7\\ \hdashline 4 & 3\\ 0 & 0\\ \hdashline 1 & 6\\ 0 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 3 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

试将该系统按可控性和可观测性进行结构分解。

解　根据约当标准形的可控判别的准则和可观测判别准则，可判定：

可 控 变 量： x_1，x_2，x_3，x_5

不可控变量： x_4，x_6

可观测变量： x_1，x_2，x_4

不可观测变量： x_3，x_5，x_6

综上述可知：

可控且可观测变量： x_1，x_2

可控但不可观测变量： x_3，x_5

不可控但可观测变量： x_4

不可控不可观测变量： x_6

于是，令

$$\boldsymbol{x}_{co} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{c\bar{o}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{\bar{c}o} = x_4, \quad \boldsymbol{x}_{\overline{co}} = x_6$$

按此顺序重新排列 A,B,C 的行和列，那么就可导出

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\overline{co}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{co} \\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}} \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}o} \\ \boldsymbol{x}_{\overline{co}} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ \hdashline 4 & 3 \\ 1 & 6 \\ \hdashline 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc:c:c} 3 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{co} \\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}} \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}o} \\ \boldsymbol{x}_{\overline{co}} \end{bmatrix}$$

9.26　系统 $\Sigma_0 = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = [3 \quad 1]\boldsymbol{x}$$

试说明当状态反馈阵 $\boldsymbol{K}$ 取哪些值时，会改变系统的可观测性。

解　Σ_0 的可观测矩阵

$$\boldsymbol{P}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}_0=2$，$\Sigma_0$ 的状态完全可观测。

令状态反馈阵 $\boldsymbol{K}=[k_1\quad k_2]$，则加状态反馈后系统 $\Sigma_K=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 的可观测矩阵

$$\boldsymbol{P}_{0K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2+k_1 & k_2\end{bmatrix}$$

显然，当取 $k_1=2+3k_2$ 时，其秩为1，则此时状态反馈会改变系统的可观测性。

【点评】　状态反馈和输出反馈都不改变系统的可控性。输出反馈不改变系统的可观测性，但状态反馈可能改变系统的可观测性。这是因为状态反馈的加入可能使系统传递函数出现零、极点对消现象。

9.27　已知倒立摆系统的线性化状态方程 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 11 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

试分析其稳定性，并设计反馈阵 $\boldsymbol{K}$ 使闭环极点配置在 $-1,-2,-1\pm \mathrm{j}$。

解　(1) 稳定性分析

系统特征多项式为

$$\Delta(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\lambda^4-11\lambda^2=\lambda^2(\lambda^2-11)$$

显然，极点为 $0,0,\sqrt{11},-\sqrt{11}$，系统是不稳定的。

(2) 验证可控性

可控性矩阵

$$\boldsymbol{P}_c=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -11\\ -1 & 0 & -11 & 0\end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}_c=4$，系统状态完全可控，任意配置闭环极点的状态反馈阵 $\boldsymbol{K}$ 存在。

(3) 计算状态反馈阵

设 $\boldsymbol{K}=[k_1\quad k_2\quad k_3\quad k_4]$，闭环系统矩阵

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ k_1 & k_2 & k_3-1 & k_4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -k_1 & -k_2 & 11-k_3 & -k_4\end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda)=\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})=$$
$$\lambda^4+(k_4-k_2)\lambda^3+(k_3-k_1-11)\lambda^2+10k_2\lambda+10k_1$$

由给定极点可确定期望的特征多项式

$$\Delta^*(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+1+\mathrm{j})(\lambda+1-\mathrm{j})=$$
$$\lambda^4+5\lambda^3+10\lambda^2+10\lambda+4$$

令 $\Delta(\lambda)=\Delta^*(\lambda)$,计算对应系数相等得

$$k_1=0.4,\ k_2=1,\ k_3=21.4,\ k_4=6$$

即状态反馈阵

$$\boldsymbol{K}=[0.4\quad 1\quad 21.4\quad 6]$$

9.28　已知系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{20}{s^3+4s^2+3s}$$

设计一个状态反馈阵 $\boldsymbol{K}$,使闭环系统的极点为 -5,$-2+\mathrm{j}5$,$-2-\mathrm{j}2$。

解　(1) 验证系统的能控性,以确定 $\boldsymbol{K}$ 阵的存在性,可用以下 3 种方法。

解法 1　该系统可化为如下的可控标准形

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-3&-4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=[20\quad 0\quad 0]\boldsymbol{x}$$

故系统可控。

解法 2　用秩判断

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}_c=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}]=3$$

系统可控。

解法 3　用传递函数判据

$$G(s)=\frac{20}{s^3+4s^2+3s}=\frac{20}{s(s+1)(s+3)}$$

系统传递函数无零极点对消,故系统可控。

(2) 按可控标准形求 $\boldsymbol{K}$ 阵。

令 $\boldsymbol{K}=[k_1\quad k_2\quad k_3]$,则

$$\det[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})]=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\-k_1&3-k_2&\lambda+4-k_3\end{vmatrix}=$$
$$\lambda^3+(4-k_3)\lambda^2+(3-k_2)\lambda-k_1$$

要求设计的闭环系统特征方程为

$$(\lambda+5)(\lambda+2-\mathrm{j}5)(\lambda+2+\mathrm{j}2)=\lambda^3+9\lambda^2+25\lambda+40$$

比较两式系数得

$$k_1 = -40,\quad k_2 = -25,\quad k_3 = -5$$

故所求状态反馈阵

$$\boldsymbol{K} = [-40 \quad -25 \quad -5]$$

9.29　已知被控系统由下列 3 个传递函数串联而成

$$G_1(s) = \frac{0.1}{0.1s+1},\quad G_2(s) = \frac{0.5}{0.5s+1},\quad G_3(s) = \frac{1}{s}$$

试以 G_1, G_2, G_3 的输出为状态变量列写状态方程。设计状态反馈阵 $\boldsymbol{K}$,使闭环极点配置在 $-3, -2\pm \mathrm{j}2$,并画状态图。

解　依题意画出系统结构图如图 9.11(a) 所示。由结构图可以建立被控系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}_1 = -10x_1 + u,\quad \dot{x}_2 = -2x_2 + x_1,\quad \dot{x}_3 = x_2$$

即

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

判别系统可控性,可控性矩阵

$$\boldsymbol{P}_c = [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 100 \\ 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}_c = 3 = n$ 满秩,可利用状态反馈任意配置极点。

采用控制律 $u = v + \boldsymbol{Kx}$,令

$$\boldsymbol{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

闭环系统矩阵

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} = \begin{bmatrix} -10+k_1 & k_2 & k_3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det[\lambda \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})] = \lambda^3 + (12-k_1)\lambda^2 + (20-2k_1-k_2)\lambda - k_3$$

系统希望特征多项式为

$$(\lambda+3)(\lambda+2+\mathrm{j}2)(\lambda+2-\mathrm{j}2) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 20\lambda + 24$$

令两式相等,比较系数可得

$$k_1 = 5,\ k_2 = -10,\ k_3 = -24$$

$$\boldsymbol{K} = [5 \quad -10 \quad -24]$$

系统状态图见图 9.11(b)。

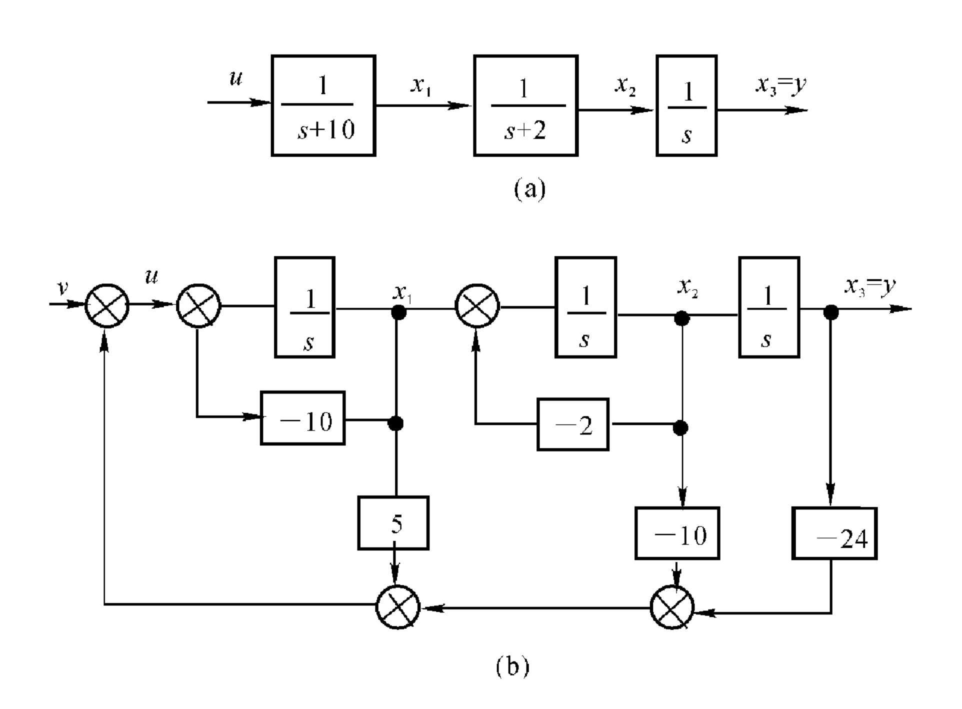


图 9.11　系统结构图和状态图

9.30　已知系统状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

试设计状态观测器，使观测器极点配置在 -3，-4，-5 上，并画出观测器结构图及状态图。

解　(1) 判别系统可观测性。系统可观测矩阵

$$\boldsymbol{P}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

因为 $\text{rank}\boldsymbol{P}_o = 3$，系统可观测，观测器极点可以任意配置。

观测器的希望特征多项式为

$$\Delta_1(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 4)(\lambda + 5) = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 47\lambda + 60$$

观测器的结构图如图 9.12(a) 所示，观测器方程为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{HC})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}u + \boldsymbol{H}y$$

令 $\boldsymbol{H} = [h_1 \quad h_2 \quad h_3]^{\mathrm{T}}$，观测器特征多项式为

$$\Delta_2(\lambda) = \det[\lambda\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{HC})] = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & h_1 \\ -3 & \lambda + 1 & h_2 - 1 \\ 0 & -2 & \lambda + h_3 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^3 + h_3\lambda^2 + (2h_2 - 3)\lambda + (2 + 6h_1 - 2h_2 - h_3)$$

$\Delta_1(\lambda) = \Delta_2(\lambda)$，比较系数得

$$h_3 = 12,\quad h_2 = 25,\quad h_1 = 20$$

故

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 12 \end{bmatrix}$$

观测器状态图如图 9.12(b) 所示。

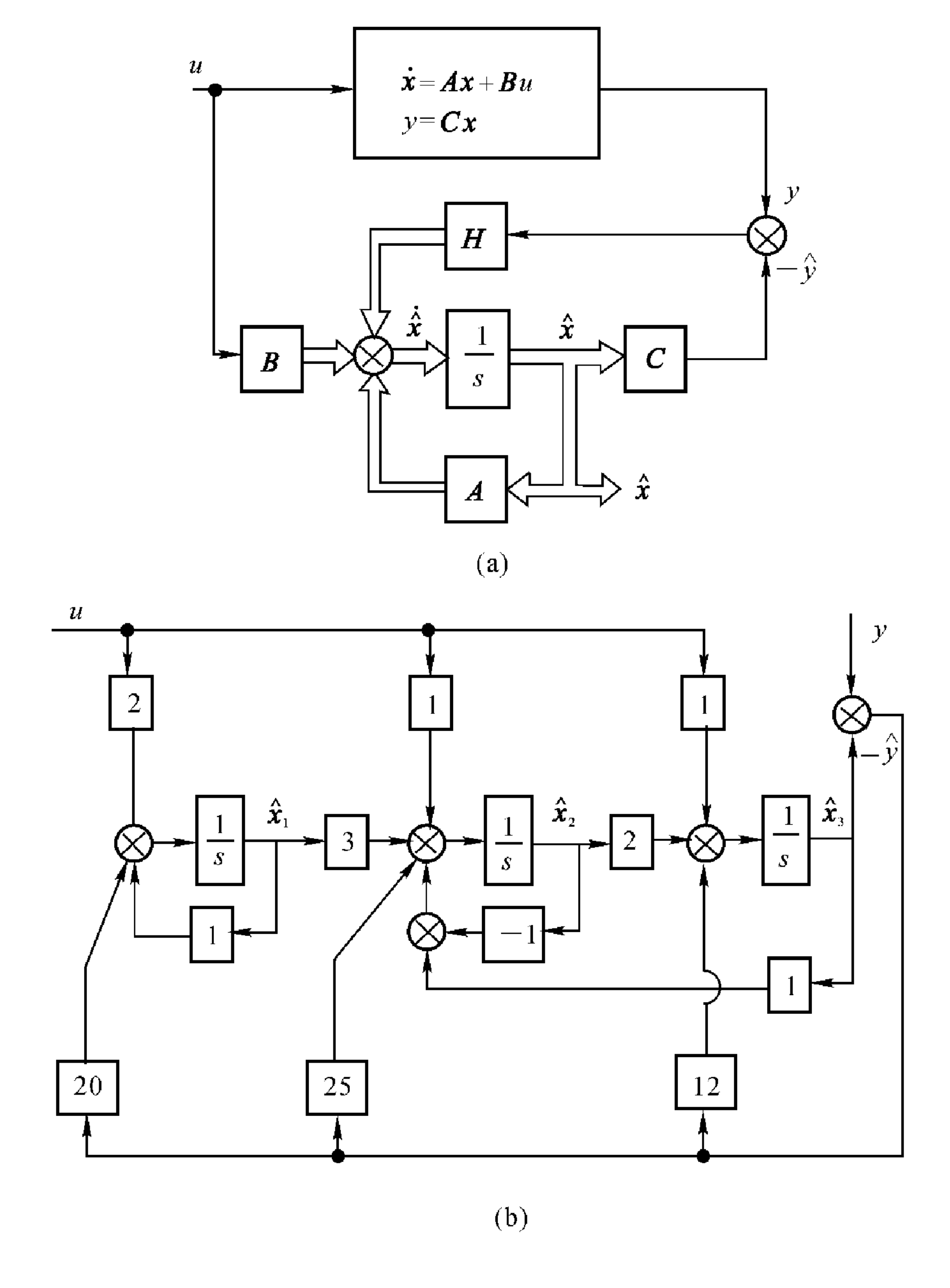


图 9.12　例 9.30 图

(a) 观测器结构图；(b) 观测器状态图

9.31　设系统状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 6 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

(1) 画出系统状态图；

(2) 求系统传递函数；

(3) 判定系统可控性,可观测性；

(4) 求系统状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$；

(5) 当 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$, $u(t)=0$ 时,求系统输出 $y(t)$；

(6) 设计全维状态观测器,将观测器极点配置在{−10+j10,−10−j10}处；

(7) 在(6)的基础上,设计状态反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$,使系统闭环极点配置在{−5+j5,−5−j5}处；

(8) 画出系统总体状态图。

解　(1) 原系统状态图如图 9.13 所示。

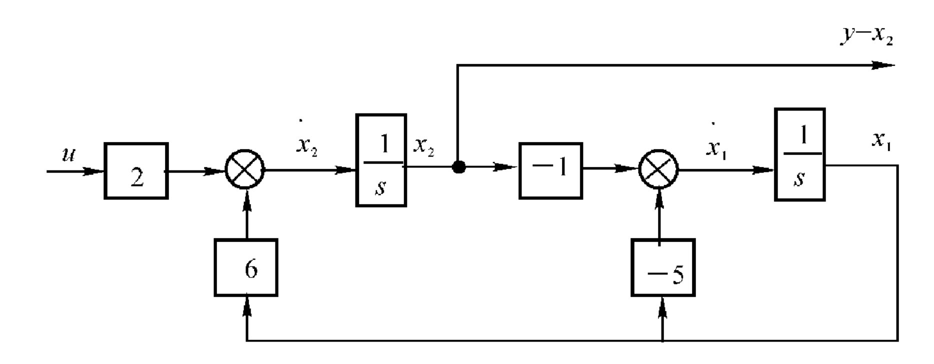


图 9.13　系统状态图

(2)　$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -6 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s & -1\\ 6 & s+5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\frac{2(s+5)}{s^2+5s+6}$$

(3)　$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}_c=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB}\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}=2=n$,故系统可控。

$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}_o=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 6 & 0\end{bmatrix}=2=n$,故系统可观测。

(4)

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=\mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -6 & s\end{bmatrix}^{-1}\right\}=$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{3}{s+3}-\frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+2} \\ \frac{-6}{s+3}+\frac{6}{s+2} & \frac{-2}{s+3}+\frac{3}{s+2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3e^{-3t}-2e^{-2t} & e^{-3t}-e^{-2t} \\ -6e^{-3t}+6e^{-2t} & -2e^{-3t}+3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(5)

$$y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3e^{-3t}-2e^{-2t} & e^{-3t}-e^{-2t} \\ -6e^{-3t}+6e^{-2t} & -2e^{-3t}+3e-2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 9e^{-2t}-6e^{-3t}$$

(6) 设观测器输出误差反馈矩阵 $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$

$$\det[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{C})] = \left|\begin{bmatrix} \lambda+5 & 1 \\ -6 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\right| =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+5 & 1+h_1 \\ -6 & \lambda+h_2 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^2+(5+h_2)\lambda+6+6h_1+5h_2 =$$

$$(\lambda+10-j10)(\lambda+10+j10) = s^2+20s+200$$

比较系数,得

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{119}{6} \\ 15 \end{bmatrix}$$

(7) 设状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K} = [k_1 \quad k_2]$

$$\det[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})] = \left|\begin{bmatrix} \lambda+5 & 1 \\ -6 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right| =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+5 & 1 \\ -6-2k_1 & \lambda-2k_2 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^2+(5-2k_2)\lambda+6+2k_1-10k_2 =$$

$$(\lambda+5-j5)(\lambda+5+j5) = \lambda^2+10\lambda+10$$

比较系数,得

$$\boldsymbol{K} = [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

(8) 整体系统状态图如图 9.14 所示。

9.32　求系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 李雅普诺夫函数,并分析系统的稳定性。式中,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

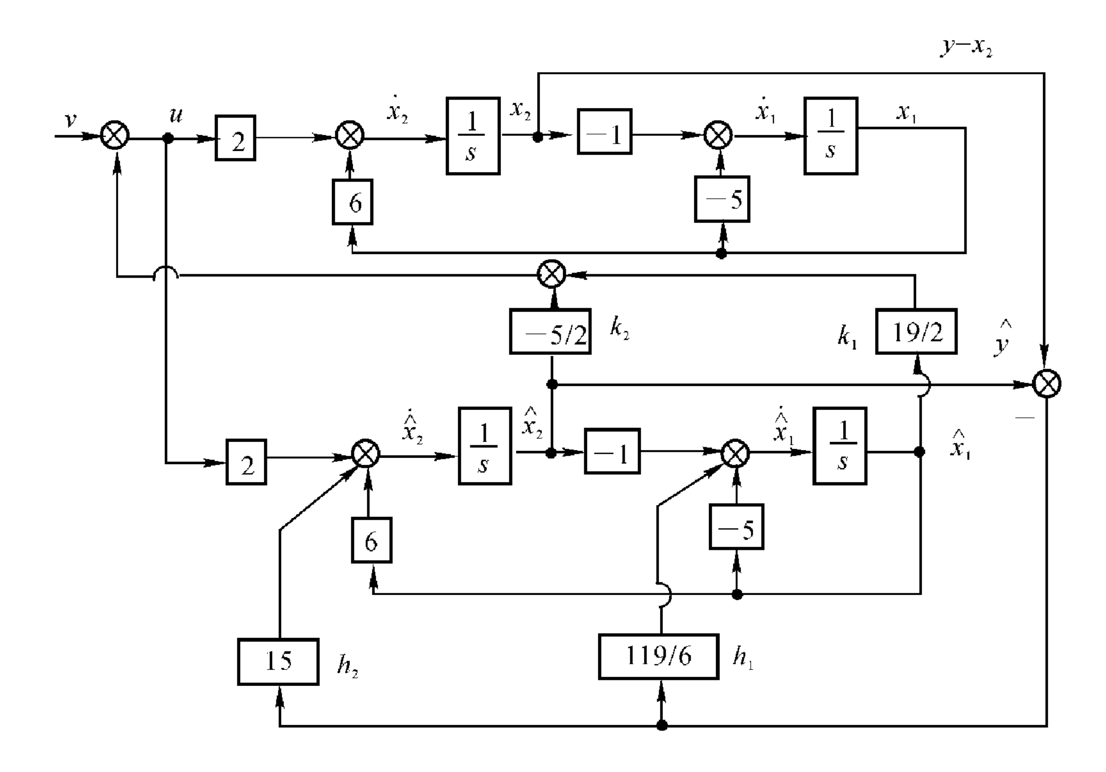


图 9.14　整体系统状态图

解　因为当 $x_1=0, x_2=0$ 时，$\dot{x}_1=0, \dot{x}_2=0$，故系统平衡点是原点。设李雅普诺夫函数为

$$\boldsymbol{V}(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 由下式确定

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q}$$

取正定实对称阵 $\boldsymbol{Q}$ 为二阶单位阵，正定实对称阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$，代入上式有

$$\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{cases}4p_{12}=1\\ p_{11}-2p_{12}-2p_{22}=0\\ 4p_{22}-2p_{12}=1\end{cases}$$

解得

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{5}{4} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{8}\end{bmatrix}$$

一阶主子式　　$\Delta_1 = \frac{5}{4} > 0$

二阶主子式　　$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{vmatrix} = \frac{7}{32} > 0$

故 $\boldsymbol{P}$ 正定，因此系统在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的，系统的一个李雅普诺夫函数为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{5}{4}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{3}{8}x_2^2$$

$$\dot{\boldsymbol{V}} = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = -[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -(x_1^2 + x_2^2)$$

9.33　确定使二次型函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_3x_1$ 为正定时，待定常数的取值范围。

解　写出二次型函数的向量 — 矩阵形式

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & b & -2 \\ -1 & -2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{P}$ 的顺序主子式为

$$\Delta_1 = a$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = ab - 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & b & -2 \\ -1 & -2 & c \end{vmatrix} = c(ab-1) - 4a - b + 4$$

要使 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ 正定

$$\Delta_1 > 0，即\ a > 0$$

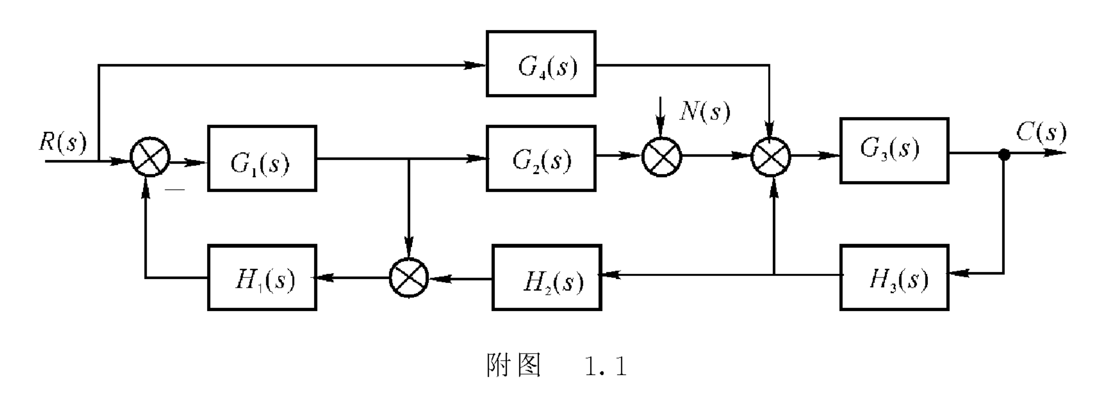
$$\Delta_2 > 0，即\ b > \frac{1}{a}$$

$$\Delta_3 > 0，即\ c > \frac{4a + b - 4}{ab - 1}$$

附 录

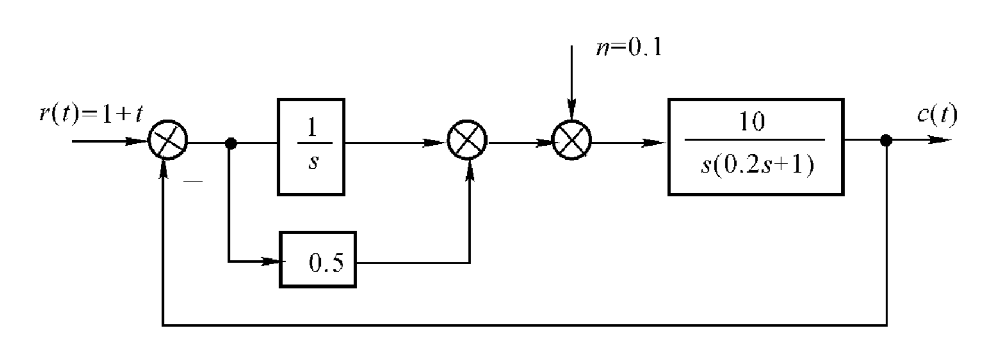
自测试题一

一、(10 分) 已知系统结构如附图 1.1 所示，试求系统传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$，$\frac{C(s)}{N(s)}$。



附图 1.1

二、(10 分) 系统结构如附图 1.2 所示，试判别系统的稳定性，并确定系统的稳态误差 e_{ssr} 及 e_{ssn}。



附图 1.2

三、(10 分) 已知某单位反馈系统，开环传递函数 $G(s)=\frac{K_0(s+1)}{s(s-3)}$。

(1) 试画出 $K_0=0\to\infty$ 时闭环根轨迹；

(2) 求使闭环系统稳定的开环增益 K 的范围；

(3) 当 $K_0=10$ 时，若输入 $r(t)=t\cdot 1(t)$，计算系统的稳态误差。

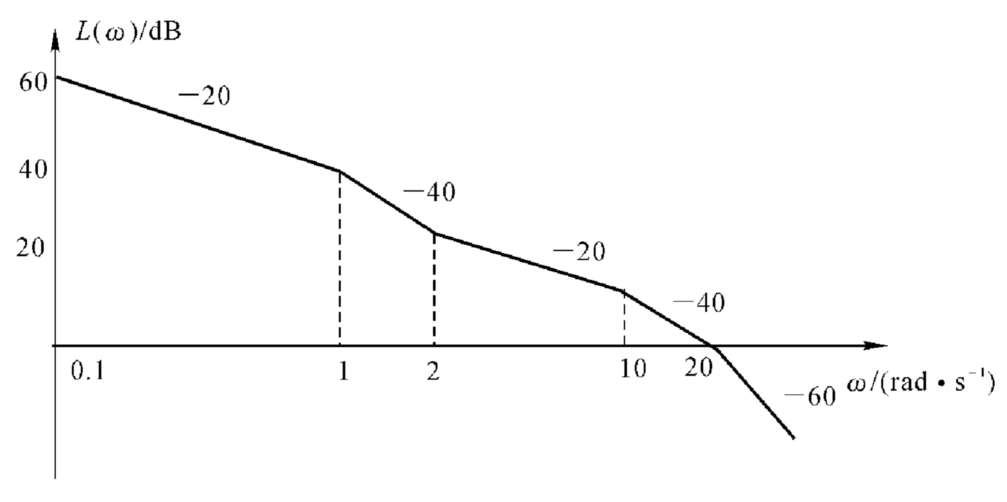
四、(15 分) 某 Ⅰ 型单位反馈的典型欠阻尼二阶系统，输入正弦信号 $r(t)=\sin\omega t$。当调整频率 $\omega=7.07$ rad/s 时，系统稳态输出幅值达到最大值 1.154 7。

(1) 求系统的动态指标($\sigma\%$, t_s)；

(2) 求系统的截止频率和相角裕度；

(3) 计算系统的速度稳态误差。

五、(10 分) 已知一单位反馈最小相角系统的对数幅频特性 $L(\omega)$ 如附图 1.3 所示。



附图　1.3

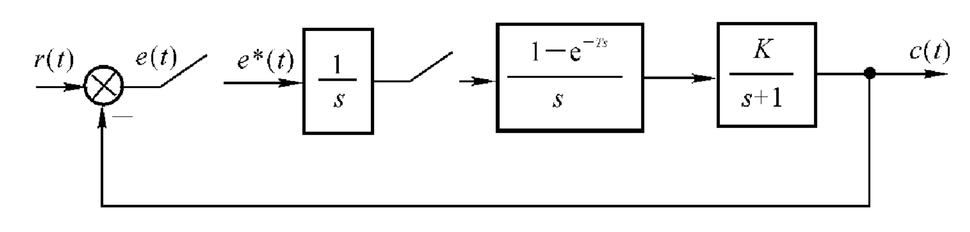
(1) 写出对应的开环传递函数 $G(s)$；

(2) 写出相频特性 $\varphi(\omega)$ 的表达式，当 $\omega=1$ 时，$\varphi(\omega)$ 等于多少？

(3) 概略绘出相应的对数相频特性曲线；

(4) 概略绘出幅相频率特性曲线 $G(\mathrm{j}\omega)$。

六、(15 分) 采样系统结构图如附图 1.4 所示，采样周期 $T=1$ s。



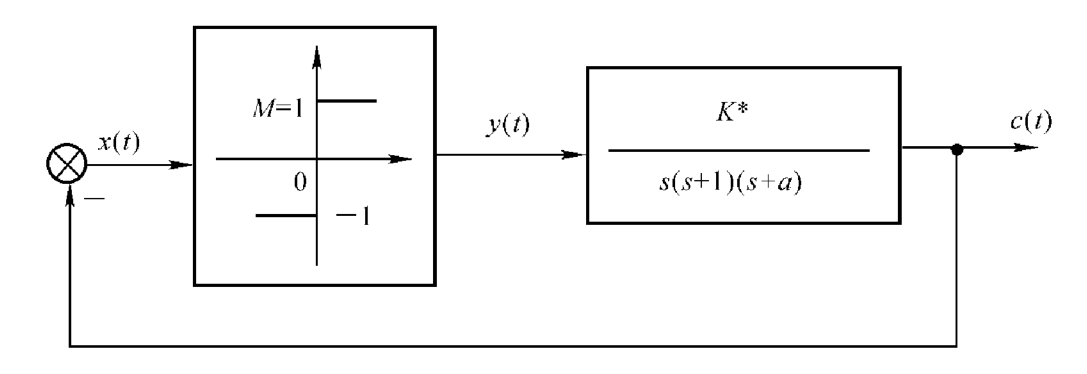
附图　1.4

(1) 求闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$；

(2) 确定使系统稳定的 K 值范围；

(3) 当 $K=4$, $r(t)=2t$ 时,求系统稳态误差 e_{ss}。

七、(15 分) 非线性系统结构图如附图 1.5 所示,希望在输出端得到 $\omega=2$ rad/s,幅值为 $A=4$ 的周期(近似正弦) 信号,试确定系统参数 K^*, a 的值。



附图 1.5

八、(15 分) 系统状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}3 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

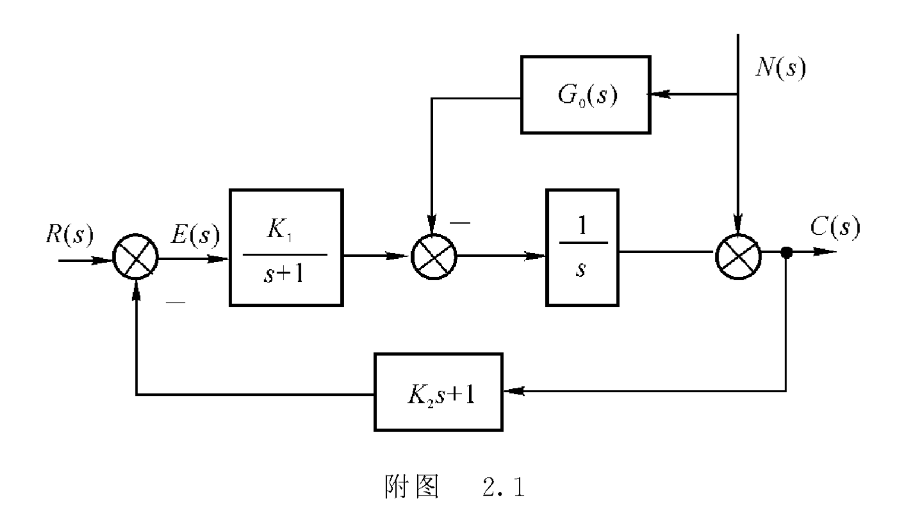
(1) 判断系统的可控性和可观测性;

(2) 求系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$;

(3) 当输入函数 $u(t)=1$ 时,求系统状态方程的解。

自测试题二

一、(20 分) 系统结构图如附图 2.1 所示,试求:



附图 2.1

(1) 系统闭环传递函数 $\Phi(s)$;

(2) 使闭环极点的实部 $\sigma=-5$，且系统阻尼比 $\xi=0.707$，写出闭环极点的坐标表达式；

(3) 求使系统极点落在上述希望位置的 K_1，K_2 值；

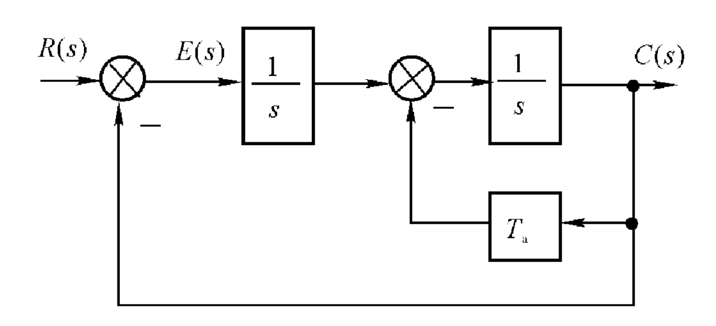
(4) 设计 $G_0(s)$，使在 $n(t)$ 单独作用时不产生稳态误差。

二、(15 分) 系统结构如附图 2.2 所示。

(1) 试绘制 $T_a=0\rightarrow\infty$ 时的闭环根轨迹；

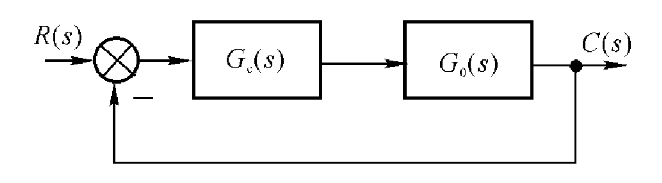
(2) 确定使系统为过阻尼状态时的 T_a 范围；

(3) 确定阻尼比 $\xi=0.5$ 时的 T_a 值，确定相应的闭环极点位置，并计算此时输入 $r(t)=t$ 时系统的稳态误差 e_{ss}。



附图　2.2

三、(15 分) 在附图 2.3 所示的系统中，已知 $G_0(S)=\dfrac{100}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$，校正装置 $G_c(s)$ 的对数幅频特性如附图 2.4 所示。



附图　2.3

(1) 试在附图 2.4 中作出未校正系统的开环对数幅频曲线 $L_0(\omega)$；

(2) 在附图 2.4 中作出校正后系统的开环对数幅频曲线 $L(\omega)$；

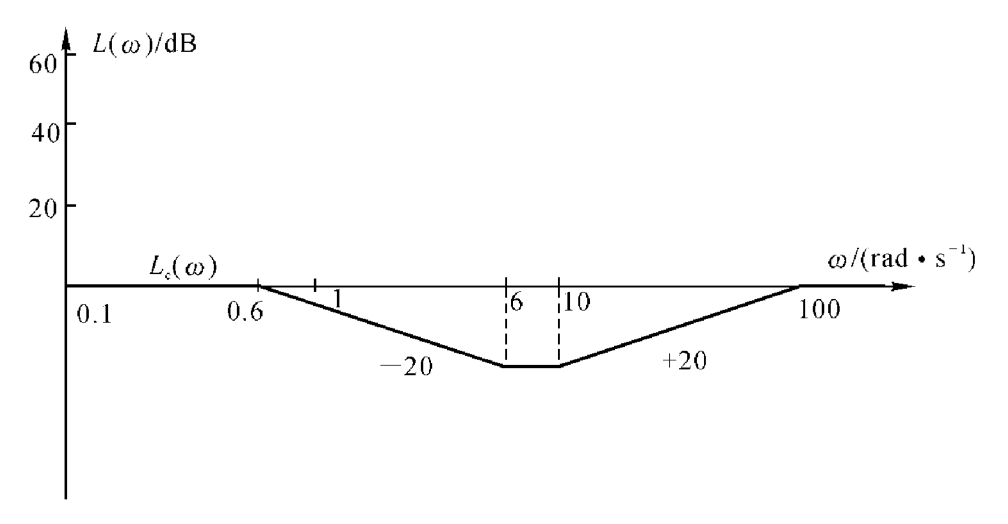
(3) 当校正后系统截止频率 $\omega_c=10$ rad/s 时，求相应的相角裕度 γ。

四、(15 分) 采样系统结构图如附图 2.5 所示，采样周期 $T=1$ s。

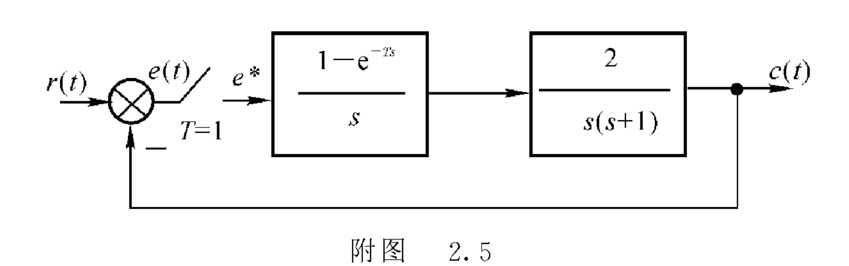
(1) 求闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)=\dfrac{C(z)}{R(z)}$；

(2) 当 $r(t)=t$ 时，求 $c^*(t)$。

五、(15 分) 非线性系统结构图以及 $G(j\omega)$，$-\dfrac{1}{N(A)}$ 曲线分别如附图 2.6(a)，(b) 所示。



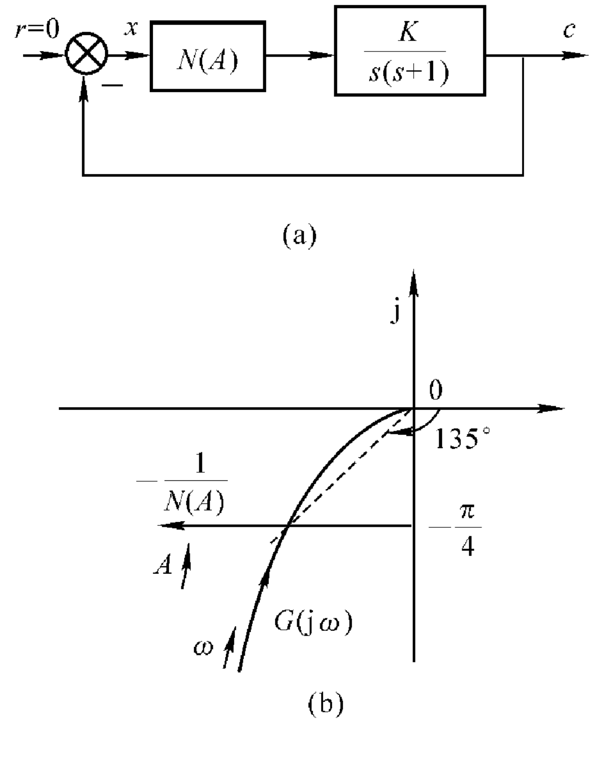
附图 2.4



附图 2.5

(1) 判断系统是否存在自振?若存在自振,试求出自振频率 ω 及相应的开环增益 K;

(2) 试定性分析,当 K 增大时,系统自振的振幅 A 和频率 ω 会怎样变化?



附图 2.6

六、(10 分) 设有不稳定的线性定常系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\3 & -1 & 1\\0 & 2 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

试问能否通过状态反馈把系统闭环极点配置在-10及$-1\pm \mathrm{j}\sqrt{3}$处?若能,求出实现上述极点配置的状态反馈增益阵$\boldsymbol{K}$。

七、(10 分) 系统状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

(1) 判断系统的可控性和可观测性;

(2) 设计全维状态观测器,使观测器极点位于-1,-2,画出观测器的状态变量图。

自测试题答案

自测试题一答案

一、$\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{G_1G_2G_3+G_3G_4(1+G_1H_1)}{1+G_1H_1-G_3H_3-G_1G_2G_3H_1H_2H_3-G_1G_3H_1H_3}$

$\dfrac{C(s)}{N(s)}=\dfrac{G_3(HG_1H_1)}{1+G_1H_1-G_3H_3-G_1G_2G_3H_1H_2H_3-G_1G_3H_1H_3}$

二、闭环系统稳定,$e_{ssr}=e_{ssn}=0$

三、(1) 分离点 $d_1=1$, $d_2=-3$

与虚轴交点:$\omega=\pm\sqrt{3}$ $(K_0=3)$

(2) 使系统稳定的 K 范围:$K>1$

(3)$e_{ss}=-\dfrac{3}{10}$

四、(1)$\sigma\%=16.5\%$, $t_s=0.7\mathrm{s}$

(2)$\omega_c=10\ \mathrm{rad/s}$, $\gamma=45^\circ$

(3)$e_{ss}=0.1$

五、(1)$G(s)=\dfrac{100\left(\dfrac{s}{2}+1\right)}{s(s+1)\left(\dfrac{s}{10}+1\right)\left(\dfrac{s}{20}+1\right)}$

(2) $\varphi(\omega) = \arctan\frac{\omega}{2} - 90° - \arctan\omega - \arctan\frac{\omega}{10} - \arctan\frac{\omega}{20}$

$\varphi(1) = -117°$

(3) 略

(4) 略

六、(1)$\Phi(z) = \dfrac{0.632Kz}{z^2 + (0.632K - 1.368)z + 0.368}$

(2)$0 < K < 4.33$

(3)$e_{ss} = 0.5$

七、$K^* = 20\pi$，$a = 4$

八、(1) 系统可控，可观测

(2)$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

(3)$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}x_1(0) + 1 - e^{-t} \\ e^{2t}x_2(0) + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$

自测试题二答案

一、(1)$\Phi(s) = \dfrac{K_1}{s^2 + (1 + K_1K_2)s + K_1}$

(2)$\lambda_{1,2} = -5 \pm j5$

(3)$K_1 = 50$，$K_2 = 0.18$

(4)$G_0(s) = s$

二、(1) 略

(2)$T_a > 2$

(3)$T_a = 1$，$\lambda_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm j\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$e_{ss} = 1$

三、(1) 略

(2) 略

(3)$\omega_c = 10$ rad/s 时，$\gamma = 51°$

四、(1)$\Phi(z) = \dfrac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$

(2)$c^*(t) = 0.368\delta(t - 2T) + 0.84\delta(t - 3T) + \cdots$

五、(1) 存在自振，$\omega = 1$，$K = \dfrac{\pi}{2}$

(2)$K\uparrow \rightarrow A\uparrow, \omega\uparrow$

六、系统可控,可任意配置极点

$$\boldsymbol{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [-77.5 \quad -33 \quad -12]$$

七、(1) 系统可控,可观测

(2)$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$,状态图(略)

参考文献

1 胡寿松．自动控制原理．北京:国防工业出版社,1998

2 胡寿松,沈程智,赵平等．自动控制原理习题集．北京:国防工业出版社,1990

3 卢京潮,刘慧英．自动控制原理典型题解析及自测试题．西安:西北工业大学出版社,2001

4 高国燊,余文烋．自动控制原理．广州:华南理工大学出版社,2001

5 王彤,宋申民．自动控制原理试题精选与答题技巧．哈尔滨,哈尔滨工业大学出版社,2000.8

6 史忠科,卢京潮．自动控制原理常见题型解析及模拟题．西安:西北工业大学出版社,1998

7 李友善．自动控制原理．北京:国防工业出版社,1983

8 李友善．自动控制原理200题．哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1995

9 周雪琴,张洪才．控制工程导论．西安:西北工业大学出版社,1995

10 王显正,陈正航,王旭永．控制理论基础．北京:科学出版社,2000

11 周春晖,厉玉鸣．控制原理例题习题集．北京:化工工业出版社,2001.7

12 尤昌德,阙志宏等．现代控制理论基础例题与习题．西安:西安电子科技大学出版社,1991

13 董景新,赵长德．控制工程基础．北京:清华大学出版社,2001

14 徐薇莉,曹柱中,田作华．自动控制理论与设计．上海:上海交通大学出版社,2001.9

15 王敏,向农等．自动控制原理试题精选题解．武汉:华中科技大学出版社,2002.1

16 戴忠达．自动控制理论基础．北京:清华大学出版社,1991